Методика работы с текстовыми задачами на уроках математики в условиях реализации ФГОС

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

Методика работы с текстовыми задачами на уроках математики в условиях реализации ФГОС

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по подготовки: 44.03.02 Психолого-педагогическое образование, 44.03.01 Педагогическое образование, 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). (Протокол № ** от «***» ****** 2017 г.).

Красноярск – Лесосибирск 2017

УДК 372.851
ББК 22.141я73+22.191я73

Коллектив авторов
Т.В. Захарова, А.И. Пеленков, Е.Н. Яковлева, Т.В. Качурина, Т.В. Котова

Рецензенты:
Е.М. Плеханова, канд. пед. наук, доцент (КГПУ им В.П. Астафьева);
Т.М. Герасимова, канд. тех. наук, доцент (Сибирский технологический университет).

Методика работы с текстовыми задачами на уроках математики в условиях реализации ФГОС: учеб. пособие / сост. Т.В. Захарова, А.И. Пеленков, Е.Н. Яковлева, Т.В. Качурина, Т.В. Котова. – Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2017. – 102 с.
ISBN

Учебное пособие содержит теоретический материал, методические особенности обучения решению текстовых задач в начальной и основной школы, многочисленные примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 44.03.02 Психолого-педагогическое образование, 44.03.01 Педагогическое образование, 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Оно будет полезным также для учителей математики и учащихся старших классов, готовящихся к ЕГЭ и ОГЭ.

ISBN

Содержание

Введение	5
1 Теоретические аспекты текстовых задач на уроках математики в начальной школе	6
1.1 Текстовая задача: понятие, методы решения	6
1.2 Этапы работы над текстовой задачей на уроках математики в начальной школе	9
1.3 Методические особенности обучения решению текстовых задач в начальной школе	13
2 Теоретические аспекты текстовых задач на уроках математики в основной школе	20
2.1 Методические рекомендации по обучению работы над текстовой задачей в основной школе	20
2.2 Методические особенности обучения решению задач по теме «Квадратные уравнения»	22
2.3 Методические особенности обучения решению текстовых задач по теме «Решение задач с помощью квадратных уравнений»	38
2.4 Методические особенности обучения решению текстовых задач по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия»	62
2.5 Задания для самостоятельной работы	67
Заключение	83
Список литературы	87
Приложение А	89
Приложение Б	101

Введение

Особую актуальность в настоящее время имеет развивающая парадигма образования. На первый план выдвигаются личностные достижения ученика, а знания рассматриваются как средство развития. Процесс обучения должен способствовать формированию осознанных и прочных знаний учащихся, которые, в свою очередь, являются движущей силой развития потенциала личности и необходимым условием предметной и интеллектуальной компетентности как нового результата школьного образования.

Педагоги И.Я. Лернер, М.Н. Скаткин рассматривают следующие показатели качества знаний: полноту и глубину, свёрнутость и развёрнутость, конкретность и обобщённость осознанности и прочности, оперативность и гибкость. Они являются предпосылками и необходимыми условиями формирования качеств, стоящих как бы на вершине пирамиды знаний, а именно осознанности и прочности.

В методике обучения математике осознанность знаний рассматривается преимущественно, как умение школьников обосновывать решение задач, а проверяется осознанность и прочность по умению решать задачи. Решение текстовых задач является одним из наиболее эффективных средств, реализующих цель образования, связанную с формированием инициативной, творческой личности, так как только при решении текстовых задач реализуются все три этапа применения математики: формализации знаний; решения задачи внутри математической модели; интерпретации полученного решения задачи.

Тема учебного пособия является актуальной, т.к. ребёнок с первых дней в школе встречается с задачей. Сначала и до конца обучения в школе математическая задача неизменно помогает ученику глубже выяснить различные стороны взаимосвязей в окружающей жизни, расширить свои представления о реальной действительности, учиться решать и другие математические и нематематические задачи. Задачи показывают значение математики в повседневной жизни, помогают детям использовать полученные знания в практической деятельности. Решение задач занимает в математическом образовании огромное место. Умение решать задачи является одним из основных показателей уровня математического развития, глубины освоения учебного материала. Поэтому вполне обоснованно, что текстовые задачи ежегодно включаются в варианты единого государственного экзамена и государственной итоговой аттестации по математике. Чтобы научить учащихся решению текстовых задач, учитель сам должен иметь глубокие представления о текстовых задачах, видах и схеме их решения.

Пособие состоит из двух глав. В первой главе рассматриваются теоретические аспекты текстовых задач на уроках математики в начальной школе. Описываются этапы работы над текстовой задачей на уроках математики в начальной школе и методические особенности обучения решению текстовых задач в начальной школе. Вторая глава раскрывает методические рекомендации по обучению работы над текстовой задачей в основной школе. Содержит многочисленные примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

1.1 Текстовая задача: понятие, методы, функции

Кроме различных понятий, предложений, доказательств в любом математическом курсе есть задачи. Под задачей в начальном курсе математике подразумевается специальный текст, в котором обрисована некая житейская ситуация, охарактеризованная численными компонентами. Ситуация обязательно содержит определённую зависимость между этими численными компонентами. Таким образом, текст задачи можно рассматривать как словесную модель реальной действительности [4].

В обучении математике младших школьников преобладают такие, которые называют арифметическими, текстовыми, сюжетными. Эти задачи сформулированы на естественном языке (поэтому их называют текстовыми); в них обычно описывается количественная сторона каких-то явлений, событий (поэтому их часто называют арифметическими или сюжетными); они представляют собой задачи на разыскание искомого и сводятся к вычислению неизвестного значения некоторой величины (поэтому их иногда называют вычислительными).

Текстовая задача – есть описание некоторой ситуации на естественном языке с требованиями дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие и отсутствие некоторого отношения между его компонентами или определить вид этого описания [1].

По определению И.В. Шадриной, текстовая задача – это прежде всего описание на естественном языке некоторого фрагмента объективной действительности. Но всякое естественное описание является не столько отражением действительности как она есть сама по себе, сколько пониманием её с той или иной точки зрения и сообщение этого понимания другому сознанию, т.е. представляет собой некоторую интерпретацию рассматриваемого фрагмента действительности. Текст задачи отличается от других естественно языковых текстов тем, что это текст – размышление, который требует его преобразования для достижения цели, поставленной в нём [22].

Суть требуемого преобразования, как правило, сводится к систематическому и сокращённому переводу. Оригинал не только переводится на другой язык, но и сокращается. Что-то теряется при таком сокращении, но всё, что есть существенного в оригинале, представлено в переводе, сохраняющем все отношения в сжатом виде. Такого рода преобразования принято называть гомоморфизмом. Для такого понимания необходимо не только понимание языка оригинала, но и определённый уровень владения тем языком, перевод на который осуществляется при данном преобразовании. В данном случае это язык элементарной арифметики [22].

Т.Е. Демидова текстовой задачей называет описание некоторой ситуации (явления, процесса) на естественном и (или) математическом языке с требованием какого-то компонента этой ситуации (определить числовое значение некоторой величины по известным числовым значением других величин и зависимости между ними), либо установить наличие или отсутствие некоторого отношения, либо найти последовательность требуемых действий [8].

Основная особенность текстовых задач состоит в том, что в них не указывается прямо, какое именно действие (или действия) должно быть выполнено для получения ответа на требование задачи.

Решению текстовых задач при начальном обучении уделяется огромное внимание. Связано это с тем, что такие задачи часто являются не только средством формирования многих математических понятий, но и главное – средством формирования умений строить математические модели реальных явлений, а также средством развития мышления [19].

Существуют различные методические подходы к обучению детей решению текстовых задач. Но какую бы методику обучения не выбрал учитель, ему надо знать, как устроены такие задачи, и уметь их решать различными путями.

Основными методами решения текстовых задач являются арифметический и алгебраический, геометрический, логический, практический и другие. В основе каждого метода лежат различные виды математических моделей. Например, при алгебраическом методе решения задачи составляются уравнения или неравенства, при геометрическом – строятся диаграммы или графики. Решение задачи логическим методом начинается с составления алгоритма.

Решить задачу арифметическим методом – это значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами [19].

Одну и ту же задачу можно решить различными арифметическими способами. Они отличаются друг от друга логикой рассуждений, выполняемых в процессе решения задачи.

Решим, например, различными арифметическими способами такую задачу: Лена купила 2 ручки. Цена одной ручки 3 р. 20 к., другая в два раза дороже. Сколько всего денег израсходовала Лена? [13].

1 способ

1) 320 • 2 = 640 (к.)

2) 320 + 640 = 960 (к)

Ответ: 9 р. 60 к. израсходовала Лена.

2 способ

320 • 3 = 960 (к.)

Ответ: 9 р. 60 к. израсходовала Лена.

Решить задачу алгебраическим методом – это значит найти ответ на требование задачи, составить и решив уравнение или систему уравнений.

Если для одной и той же задачи можно составить различные уравнения (системы уравнений), то это означает, что данную задачу можно решить различными алгебраическими способами.

Например. Две девочки одновременно побежали навстречу друг другу по спортивной дорожке, длина которой 420 м. Когда они встретились, первая пробежала на 60 м. больше, чем вторая. С какой скоростью бежала каждая девочка, если они встретились через 30 с. [13].

1 способ	2 способ
1) 420 – 60 = 360 (м)	1) 420 + 60 = 480 (м)

2) 360 : 2 = 180 (м) 2) 480 : 2 = 240 (м)
3) 180 : 30 = 6 (м/с) 3) 240 : 30 = 8 (м/с)
4) 180 + 60 = 240 (м/с) 4) 240 – 60 = 180 (м/с)
5) 240 : 30 = 8 (м/с) 5) 180 : 30 = 6 (м/с)

В процессе работы над текстовыми арифметическими задачами используется специальный приём прикидка результатов – определение границ искомого числа [7].

Решить задачу геометрическим методом – значит найти ответ на требование задачи, используя геометрические построения или свойства геометрических фигур. Одну и ту же задачу можно также решить различными геометрическими способами, если для её решения используются различные построения или свойства фигур [8].

Например. Из двух городов А и В, расстояние между которыми 250 км, навстречу друг другу выехали два туриста. Скорость движения первого равна 20 км/ч, второго – 30 км/ч. Через сколько часов туристы встретятся?

Решить задачу логическим методом – это значит найти ответ на требование задачи, как правило, не выполняя вычислений, а только используя логические рассуждения.

Решить задачу практическим методом – значит найти ответ на требование задачи, выполнив практические действия с предметами или их копиями (моделями, макетами и т.п.) [8].

Иногда в ходе решения задачи применяются несколько методов: алгебраический и арифметический; геометрический и практический и т.п. в этом случае считается, что задача решается комбинированным (смешанным) методом.

Комбинированный метод позволяет получить ответ на требование задачи более простым путём.

Н.Б. Истомина определяет и выдвигает следующие необходимые условия для успешного обучения младших школьников решению текстовой задачи: 1) формирование у учащихся навыков чтения; 2) усвоение учениками конкретного смысла сложения и вычитания, отношений *больше на ... меньше на ...* разного сравнения (для этой цели используется не решение простых типовых задач, а способ соотнесения предметных, вербальных, схематических и символических моделей); 3) сформированность приёмов умственной деятельности; 4) умение складывать и вычитать отрезки и интерпретировать с их помощью различные ситуации [15].

Младший школьник, как известно, не обладает достаточным уровнем абстрактного мышления. Задача учителя начальной школы заключается в том, чтобы научить младшего школьника представлять конкретные объекты в виде символической модели, помочь ему отработать навык перевода текстовой задачи на математический язык.

Таким образом, придерживаясь современной терминологии, текстовая задача представляет собой словесную модель ситуации, явления, события, процесса и т.п. Как в любой модели, в текстовой задаче описывается не все событие или явления, а лишь его количественные и функциональные характеристики.

Основными методами решения текстовых задач являются арифметический и алгебраический. Так же для решения текстовых задач применяются логический, практический и комбинированный методы.

1.2 Этапы работы над текстовой задачей на уроках математики в начальной школе

Задача, для решения которой надо выполнить одно арифметическое действие, называется простой [1].

При решении простых задач происходит первое знакомство с задачей и её составными частями. В связи с решением простых задач дети овладевают основными приёмами работы над простыми задачами каждого вида.

Методически принято выделять следующие этапы работы над задачей на уроке:

1. Подготовительная работа.
2. Работа по разъяснению текста задачи.
3. Разбор задачи (анализ), поиск пути решения и составление плана решения.
4. Проверка или работа над задачей после её решения [3].

Особенности каждого из этапов в процессе решению простых задач обуславливаются тем, что простые задачи являются, с одной стороны, одним из средств формирования понятий о смысле арифметических действий, с другой стороны, являются подготовительной ступенью к обучению решению составных задач.

В связи с этим на подготовительном этапе к решению конкретной простой задачи необходимо предложить детям задание, позволяющее педагогу проверить, понимают ли ученики смысл действия, которое будут выполнять в задаче. Такая работа проводится либо на предметной, либо на схематической наглядности.

Сложение выступает как объединение двух множеств, не имеющих общих элементов, вычитание – как удаление части множества. Например, подготовительный этап к решению простых задач на нахождение суммы и остатка может содержать такие задания:

Педагог выставляет на фланелеграфе кружки разного цвета: красные, синие, зелёные и предлагает показать, сколько всего красных и синих. Затем педагог предлагает записать процесс нахождения количества красных и синих кружков с помощью математического выражения: 3 + 2, затем дети находят его значение [4]. Чтобы исключить пересчитывание, работу можно организовать так: один ученик снимает с фланелеграфа сначала 3 красных кружка и кладёт их в конверт, а затем 2 синих и кладёт их туда же. Другой ученик записывает математическое выражение, соответствующее выполненному действию, и находит его значение. Затем результат проверяется пересчитыванием.

Перед решением задач на нахождение остатка полезно провести работу с наглядностью, а также убирая в конверт «уменьшаемое» и вынимая оттуда «вычитаемое», чтобы исключить пересчёт и иметь возможность затем проверить полученный результат путём пересчёта оставшихся в конверте предметов. При этом производимые действия полезно сопровождать обсуждением схемы т.е.

выяснить, какое число дети поставят в окошко, находящееся справа от знака «равно»; слева от знака «минус», справа от знака «минус».

Работа по разъяснению текста простой задачи заключается в том, что учитель выясняет все ли слова и обороты текста понятны детям [3]. При решении задач на сложение и вычитание – это термины: старше – младше, дороже – дешевле и т.п.

Разбор задачи включает в себя поиск пути решения и составления плана решения задачи.

Подход к разбору может быть аналитическим (в начальной школе обычно говорят «от вопроса») и синтетическим («от данных»).

Работа над задачей после её решения заключается в следующем:

1) если задача записывалась по действиям, то запись решения выражением (в составной задаче);
2) проверка решения;
3) решение другим способом (в составной задаче);
4) варьирование данных, условия и вопроса;
5) составление обратной задачи [3].

Запись решения выражением не является другим способом её решения, а всего лишь другой формой её записи, поэтому формулировать задание следует соответствующим способом: «Запишем решение задачи в другой форме: выражением».

Проверка решения задачи проводится с целью установления его правильности. В начальных классах используются следующие способы проверки:

1) прикидка ответа – установление возможных границ значений искомого, прикидка проводится до начала решения задачи;
2) установление соответствия между числами, полученными в результате решения задачи, и числами, данными в условии (этот способ можно назвать подстановкой);
3) решение задачи другим способом – возможно только при проверке составных задач, допускающих различные способы решения: если при решении задачи другим способом ответ совпадает, значит задача решена правильно;
4) решение обратной задачи – при этом должны получиться данные в условии прямой задачи числа.

Варьирование (т.е. изменение) данных, условия и вопроса является, по мнению А.В. Белошистой, наилучшим развивающим приёмом (наряду с проверкой) на этапе работы над задачей после её решения. Постоянное использование этого приёма помогает детям лучше осознать ситуацию, предлагаемую в задаче, установить не только связь между данными и искомым, но и их взаимосвязь в динамике; учит ребёнка не относиться к решению задачи формально, учит элементам поиска и творчества в процессе решения задачи. Варьирование вопроса в некоторых простых задачах органично подводит к знакомству с «составной задачей» [3].

Составные задачи – это задачи, решаемые в два или более действий.

Составная задача включает в себя ряд простых задач, связанных между собой так, что искомые одних простых задач служат данными других. Решение составной задачи сводится к расчленению её на ряд простых задач и последовательному их решению. Таким образом, для решения составной задачи надо установить ряд связей между данными и искомым, в соответствии с которыми выбрать, а затем выполнить арифметическое действие [1].

К моменту введения задач, для решения которых надо выполнить несколько действий, учащиеся должны уметь:

- решать простые задачи на сложение и вычитание разных типов (на нахождение остатка, неизвестных компонентов сложения и вычитания, на уменьшение или увеличения числа на несколько единиц, на разностное сравнение чисел);
- выделять структуру задачи, её условие и вопрос;
- подбирать вопрос к условию и условие к вопросу;
- объяснять смысл математических выражений, составленных из чисел, данных в условии [16].

Также учащиеся должны осознавать, что для ответа на вопрос задачи необходимо иметь достаточное количество данных (не менее двух) и что условие и вопрос связаны между собой (в вопросе должно спрашиваться о том, что неизвестно из условия, но что можно найти, опираясь на числа, данные в условии задачи).

При знакомстве с составной задачей могут быть использованы различные методические приёмы:

- Рассмотрение двух простых задач с последующим объединением их в составную:

Ёжик нашёл 2 белых гриба и 4 подосиновика.	Ёжик нашёл 6 грибов. 3 гриба он отдал белочке.
Сколько он нашёл грибов?	Сколько грибов у него осталось?
2 + 4 = 6 (гр.)	6 – 3 = 3 (гр.) [3].

Педагог рассматривает с детьми оба текста простых задач, предлагая определить, чем они похожи и чем отличаются. Затем предлагает объединить оба сюжета в одном тексте, получая, таким образом, составную задачу:

Ёжик нашёл 2 белых гриба и 4 подосиновика. 3 гриба он отдал белочке. Сколько грибов у него осталось?

1) 2 + 4 = 6(гр.)
2) 6 –3 = 3 (гр.)

- Рассмотрение простой задачи с последующим преобразованием её в составную путём изменения её вопроса [4].

Например:

Столяр сделал 8 книжных полок, а кухонных на 3 меньше. Сколько кухонных полок сделал столяр?

После её решения, учитель предлагает детям ответить на второй вопрос по тому же условию: «Сколько всего полок сделал столяр?» Далее, сравнивая ответы на оба вопроса, устанавливают их иерархию (необходимую последовательность), приходя к выводу, что постановка второго вопроса (Сколько всего полок?) необходимо требует сначала ответить на первый вопрос (Сколько кухонных полок?).

- Приём рассмотрения сюжета с действием, рассредоточенным во времени [3].

Например:

В автобусе было 6 пассажиров. На первой остановке вошли ещё 4 пассажира, а на второй ещё 1. Сколько пассажиров стало в автобусе?

При анализе текста учитель обращает внимание учащихся на то, что входили и выходили пассажиры не одновременно, а на разных остановках. Поэтому для ответа на вопрос задачи нужно выполнить два действия:

1) 6 + 4 = 10 (п.)
2) 10 + 1 = 11 (п.)

После того, как задача решена, полезно сравнить её с простой задачей: «В автобусе было 6 пассажиров, на остановке вошло ещё 5. Сколько пассажиров стало в автобусе?»

Педагог предлагает отметить в каждом из условий те предложения, которыми отличаются тексты рассматриваемых задач. После её решения можно обсудить почему в той и в другой задаче получены одинаковые ответы.

- Приём рассмотрения задач с недостающими данными [3].

Например:

У кормушки было 6 серых и 5 белых голубей. Один белый голубь улетел. Сколько белых голубей стало у кормушки?

Анализ текста показывает, что одно из данных лишнее – 6 серых голубей. Для ответа на вопрос оно не нужно. После решения задачи учитель предлагает внести в текс задачи такие изменения, чтобы это данное понадобилось. Это приводит к составной задаче:

У кормушке было 6 серых и 5 белых голубей. Один голубь улетел. Сколько голубей осталось у кормушки?

Эти изменения условий повлекут за собой необходимость выполнять два действия:

(6 + 5) – 1 или (6 – 1) + 5 или (5 – 1) + 6

Таким образом простая задача выстраивается до составной.

Обучение младших школьников решению составных задач ведётся поэтапно:

- подготовительная работа;
- ознакомление с решением первой задачи в несколько действий;
- умение решать такие задачи [16].

Содержание подготовительной работы к введению задач в два и более действий определяется рядом трудностей, возникающих у учащихся при решении. Ошибки, которые допускают ученики при решении первых задач этого типа, Л.В. Селькина сгруппировывает так:

а) ошибки вычислительного характера;

б) ошибки, связанные с пропуском арифметического действия – первого или второго [16].

Если предупреждение ошибок первого типа происходит за счёт системного тренинга вычислительных умений и навыков, то предупреждение ошибок второго типа требует серьёзной пропедевтической работы. Например, решая задачу: «На первой полке 10 книг, а на второй – на 3 книги меньше. Сколько книг на двух полках вместе?», ученики ошибочно в качестве решения могут записать равенство 10 – 3 = 7 или 7 + 10 = 17, что свидетельствует о невнимательном прочтении текста задачи. Ученик, записавший первое равенство, решил задачу, как простую, выполнив одно действие. Очевидно он не дочитал вопрос задачи, акцентировав внимание на взаимосвязи между данными, т.е. на условии. Второе равенство свидетельствует о недостаточном опыте общения школьника с задачами более сложной структуры, чем задачи в одно действие, и записи их решений в виде последовательности действий (первое промежуточное действие ученик сделал в уме, записав только действие, при помощи которого можно ответить на вопрос задачи).

Анализ типичных ошибок позволяет выделить основные направления в подготовительной работе: важно приучить школьника к внимательному прочтению текста задачи (до конца), поскольку её решение зависит не только от условия, но и вопроса. Более того, часть условия может содержаться в вопросе задачи (речь идёт о задачах не типичной структуры). Недочитав текст такой задачи, ученик не сможет выделить все данные и установить взаимосвязи между ними [16].

Таким образом, мы видим, что деятельность по решению текстовых задач включает в себя следующие этапы: анализ содержания задачи; поиск пути решения задачи и составления плана её решения; осуществление плана решения задачи; проверка решения задачи.

1.3 Методические особенности обучения решению текстовых задач в начальной школе

Методический аппарат современных учебников математики для начальной школы располагает значительным арсеналом приёмов работы, направленных на формирование общих умений по решению текстовых задач. Это сравнение задач и их решений; решение задач с буквенными данными; элементарное исследование решений задач, т.е. установление условий, при которых задача не имеет решений, имеет одно или несколько решений; решение задач разными способами; составление задач учащимися.

Для обобщения решения задач одного типа и предупреждения их смешения с задачами других видов полезна работа по сравнению: а) задач в одно или несколько действий; б) задач на уменьшение и увеличение числа не несколько единиц и в несколько раз в прямой и косвенной форме; в) задач, схожих по математической структуре, но с разной фабулой и наоборот; г) задач, похожих по сюжету, но различных с точки зрения взаимосвязей между данными и искомыми [16].

Такие тексты обычно предлагаются парами. Учитель организует беседу по их сравнению (до и после решения).

Введение буквенной символики позволяет познакомить учащихся с важнейшими понятиями современной математики – переменная, уравнение, неравенство, что способствует видеть объекты любой природы (в том числе и математической) во взаимосвязи и взаимозависимости, поскольку с ними тесно связана идея функциональной зависимости. При работе с переменной школьники осознают, что буквы, входящие в выражение, могут принимать различные числовые значения, а само буквенное выражение является обобщённой записью числовых выражений.

Одним из примеров системного использования буквенной символики является решение задач с буквенными данными. Отсутствие конкретных чисел заставляет учеников искать путь решения задачи, опираясь на существенные связи между данными и искомыми. При этом ученик не может вычислить промежуточные результаты, а должен представлять всю цепочку связей между величинами и выстраивать соответствующую последовательность действий. Исследование решения задач с буквенными данными предполагает рассмотрение различных соотношений между значениями букв, а также выявление возможности или невозможности принятия буквой конкретных числовых значений, установление влияния числовых значений переменных на количество способов решения задачи [16].

Подобные задания требуют от учащихся выполнения не только репродуктивной, но и поисковой деятельности, формируют исследовательские умения, расширяют их опыт творческой деятельности, что имеет и развивающее, и обучающее значение.

К элементарному исследованию решения задачи относятся упражнения на установление условий, при которых задача не имеет решение, имеет одно или несколько решений, а также установление условий изменения значения одной величины в зависимости от изменения другой.

Поиск решения задач разными способами способствует открытию новых связей между данными и искомыми и использованию уже известных связей, но в новых условиях. Это способствует развитию у младших школьников вариативности мышления, творческих способностей. Решение задач разными способами имеет и обучающее значение, поскольку помогает ученикам усвоить свойства арифметических действий ведь зачастую в основе разных способов лежит использование того или другого свойства.

Эффективным приемом для обобщения способа решения задач, формирования знаний о структуре задач и ее составных элементах, сущности и механизмах решения является составление задач учащимися. Это очень сложный процесс. Ученик, включенный в него, должен выполнить ряд последовательных операций, что способствует развитию у него алгоритмического мышления. Особую пользу принесет составление задач по данным, взятым из окружающей жизни. В этом случае учащиеся осознают, что математика – наука, обобщающая и описывающая закономерности, происходящие в окружающем мире. Это способствует усилению прикладной направленности курса школьной математики, реализации дидактического принципа связи обучения с жизнью [16].

Подготовка к решению задач по математике образовательной системы «Гармония» начинается во втором классе в первой четверти. В этот время осуществляется подготовка учащихся к решению задач. Предметный смысл действий сложения и вычитания. Отношения «увеличить на …», «уменьшить на …», разностное сравнение. Моделирование. Учебные модели: предметные, вербальные (тексты), графические (числовой луч), схематические (отношения величин), знаково-символические (выражение, равенство, неравенство), простейшие таблицы. Взаимосвязь между ними. Переход от одной модели к другой [20].

Продолжается работа по обучению решению текстовых задач и во второй четверти 2 класса. Данная тема предусматривает 8 часов.

В результате изучения темы «Задача» у второклассников (по образовательной системе «Гармония», автор учебников Н.Б. Истомина):

1) формируется представление о структуре задачи (условие, вопрос), об известном и неизвестном в ней; о связи её условия и вопроса и о решении задачи как процесса и как результата. Учащиеся овладевают умениями читать и анализировать текст задачи, соотносить её сюжет с математическими понятиями, записывать её решение (числовым выражением и по действиям) и ответ;

2) совершенствуются вычислительные навыки и умения, которыми они овладели при изучении предшествующих тем [20].

Проведённая подготовительная работа к решению задач, целью которой являлось формирование навыков чтения, приёмов умственной деятельности, представлений об арифметических действиях, о схематических и символических моделях, позволяет организовывать деятельность учащихся, направленную на усвоение структуры задачи и на осознание процесса её решения. При этом существенным является не отработка навыка решать определённые типы (виды) текстовых задач, а приобретение опыта в семантическом и математическом анализе различных текстовых конструкций задач и формирование умения представлять их в виде схематических и символических моделей. Средством организации этой деятельности являются специальные обучающие задания, включающие методические приёмы сравнения, выбора, преобразования и конструирования и т.д.

Одни из этих приёмов нацелены на формирование умения читать задачу (выделять условие, вопрос, известные и неизвестные величины), другие – на установление взаимосвязи между условием и вопросом, третьи помогают учащимся использовать известные им математические понятия для записи решения задачи, четвёртые формируют умение заменять вербальную модель схематической и символической. При этом один и тот же методический приём может выполнять различные функции [20].

В заданиях учебника использованы различные методические приёмы:

1) сравнение текстов задач (выявление их сходства и различия);
2) анализ текстов задач с недостающими и лишними данными;
3) выбор вопросов, на которые можно ответить, пользуясь данным условием;
4) постановка различных вопросов к данному условию;
5) выбор условия к данному вопросу так, чтобы на него можно было ответить;
6) составление условий к данному вопросу;
7) выбор решения задачи по её тексту;
8) выбор текста задачи по данному её решению;
9) комментирование выражений, составленных по условию задачи;
10) переформулировка вопроса задачи и сравнение решений;
11) построение схемы, соответствующей условию задачи;
12) выбор схемы, которая соответствует задаче;
13) дополнение условия задачи в соответствии с её вопросом;

14) составление задачи по данной схеме;

15) составление задачи по данному решению и др.

Пример

Урок 3 (задания 229, 230)

Цель. Сформировать у учащихся представление о структуре задачи, о взаимосвязи условия и вопроса задачи. Познакомить с записью её решения.

Прежде чем приступить к выполнению задания 229, рекомендуется прочитать текст в рамке на с. 70: «Задача состоит из условия и вопроса, которые связаны по смыслу между собой». После этого ребята читают сначала один текст в пункте 1 задания 229, затем другой и пытаются ответить на вопрос: «Какой текст можно назвать задачей, а какой нет?» Работу с заданием 229 можно продолжить, используя приём постановки вопроса к данному условию. Например, в пункте 1, первый текст: – Сколько лисичек нашёл Миша? (Сколько лисичек нашли Миша и Маша вместе?) Можно обратиться к приёму выбора вопросов, которые связаны с данным условием. В этом случае учитель помещает на доске, а затем читает, например, такие вопросы:

1. Сколько белых грибов нашла Маша?
2. Сколько лисичек нашёл Миша?
3. Сколько всего учеников в классе?

Ученики обосновывают, почему вопросы 1 и 3 не подходят.

При работе со вторым текстом пункта 2 можно использовать следующие приёмы: составления условия для вопроса (У Иры – 4 марки, а у Пети – 7); выбор условия к вопросу (1) У Пети - 7 марок; 2) У Иры и Пети всего 7 марок; 3) У Иры – 7 марок, а у Пети – 4). Ни одно из этих условий не подходит по смыслу к данному вопросу [20].

Вполне возможно, что вначале ученики будут выделять вопрос задачи, ориентируясь на внешний признак (предложение со знаком вопроса), поэтому так важен анализ различных текстовых конструкций, содержание которых понятно детям.

Урок 4 (задания 231 – 233). Целью данного урока является продолжение работы по усвоению учащимися структуры задачи и записи её решения, учиться анализировать и сравнивать тексты задач.

Урок 5 (задания 234 – 239)

Цель: учиться читать текст задачи и устанавливать связь между условием и вопросом. Совершенствовать вычислительные умения и навыки.

Урок 6 (задания 340 – 244) – ставит перед собой цель создать дидактические условия для анализа различных видов информации (текст, рисунок, символическая запись, схемы) и для формирования умения решать текстовые задачи (выбирать схему и ставить вопросы к данному условию).

Урок 7 (задания 245 – 250)

Цель. Учиться: выбирать схему, соответствующую задаче, комментировать выражения, составленные по условию задачи, выполнять переформулировку вопроса; находить основания для классификации выражений.

Целью 8 урока (задания 251 – 257) является продолжение формировать умения классифицировать числовые выражения (находить признак и разбивать на группы), совершенствовать вычислительные умения и навыки и умение моделировать текст задачи в виде схемы.

Урок 9 (задания 258 – 263)

Цель. Формировать умение решать задачи (семантический и математический анализ текста задач). Учиться правильно записывать ответ задачи, совершенствовать вычислительные умения и навыки, умение работать со схемой.

10 урок – контрольная работа.

Цель. Проверить умения решать задачи.

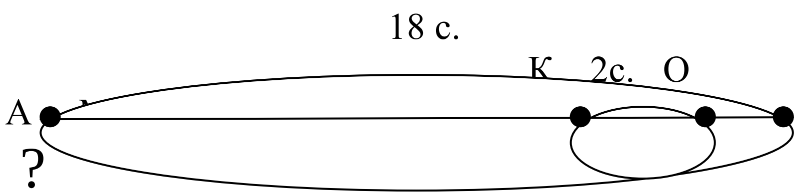
Продолжение темы «Решение задач» осуществляется в 3 четверти 2 класса. На изучение данной темы предусматривается 14 часов.

В результате изучения темы у второклассников совершенствуются умение решать задачи разными арифметическими способами, выбирать условие к данному вопросу, пояснять выражения, составленные по условию задачи.

Например

Урок 1 (задания 1 – 8)

Задание 3. Решение задачи желательно записать тремя способами и для каждого способа составить выражение. Первый способ решения задачи 3 не вызывает у детей затруднений, так как он «прозрачный»: сначала: «улетели», значит 18 – 4, а потом «прилетели», значит к оставшимся нужно прибавить 2. Трудности возникающие у детей при решении задачи вторым способом, могут быть связаны с тем пояснением, которое они дают к первому действию, а именно: на сколько больше самолётов улетело, чем прилетело. Более понятным для продолжения второго способа будет такой комментарий: 4 – 2 = 2 (с.) – на сколько меньше самолётов стало на аэродроме, (не на 4, а на 2, так как 2 прилетело, а улетело 4). Поэтому во втором действии нужно из 18 вычесть 2. Для разъяснения второго способа советуем использовать схему.



Рекомендуем выполнить на доске запись решений задачи разными способами выполнить на доске (по действиям и выражением) прокомментировать их [20].

Задание 3

1-й способ	Запись решения выражением
1) 18 – 4 = 14 (с.)	(18 – 4) + 2 = 16 (с.)
2) 14 + 2 = 16 (с.)	
2-й способ	Запись решения выражением
1) 4 – 2 = 2 (с.)	18 – (4 – 2) = 16 (с.)
2) 18 – 2 = 16 (с.)	
3 способ	Запись решения выражением
1) 18 + 2 = 20	(18 + 2) – 4 =16 (с.)

2) 20 – 4 = 16 (с.)

В четвёртой четверти 2 класса также продолжается обучение решению текстовых задач.

В 3-м классе изучаются текстовые задачи, при решении которых используются:

1) смысл действий сложения, вычитания, умножения и деления;
2) понятия «увеличить в (на) …», «уменьшить в (на) …»;
3) разностное и кратное сравнение;
4) прямая и обратная связь.
5) В содержание программы математика 4 класс («Гармония») включаются текстовые задачи с величинами (скорость, время, расстояние; цена, количество, стоимость и др.).

Таким образом, особенностью образовательной программы «Гармония»является новый методический подход к обучению решению текстовых задач, который сориентирован на формирование обобщённых умений: читать задачу, выделять условие и вопрос, устанавливать взаимосвязь между ними и, используя математические понятия, осуществлять перевод вербальной модели (текст задачи) в символическую (выражения, равенства, уравнения).

Существенным является не отработка умения решать определённые типы задач, ориентируясь на данные образцы, а приобретение опыта в семантическом и математическом анализе разнообразных текстовых конструкций. Для приобретения этого опыта деятельность учащихся направляется специальными вопросами и заданиями, при выполнении которых дети учатся сравнивать тексты задач, составлять вопросы к данному условию, выбирать схемы, соответствующие задаче, выбирать из данных выражений те, которые являются решением задачи, выбирать условия к данному вопросу, изменять текст задачи в соответствии с данным решением, формулировать вопрос к задаче в соответствии с данной схемой и др.

Предметные результаты освоения курса «Математика» на конец 4 класса по образовательной программе «Гармония» в разделе «Работа над текстовыми задачами»:

Большинство учеников научатся:

- анализировать задачу, устанавливать зависимость между величинами, взаимосвязь между условием и вопросом задачи; определять количество и порядок действий для решения задачи, выбирать и объяснять выбор действий;

- решать учебные задачи и задачи, связанные с повседневной жизнью, арифметическим способом (в 2 – 3 действия);

- оценивать правильность хода решения и реальность ответа на вопрос задачи.

Все выпускники получат возможность научиться:

- решать задачи на нахождение доли величины и величины по значению её доли (половина, треть, четверть, пятая, десятая части);

- решать задачи в 3 – 4 действия;

- находить разные способы решения задач;

- решать логические и комбинаторные задачи, используя рисунки [16].

Задания из раздела «Проверь себя! Чему ты научился в 1 – 4 классах?» включаются в уроки 15 – 28. Они проверяют результаты обучения математике в 1 – 4 классах по данной программе.

Каждое из заданий 333 – 341, 343 – 356 представлено в виде теста с выбором правильного ответа. Учебную деятельность по их выполнению педагог может организовать по-разному: коллективно, в парах, в группе или индивидуально, но завершающим этапом является обсуждение полученных результатов с обязательным обоснованием выполненных действий.

2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

В данной главе рассматривается работа учащихся по углубленному изучению вопросов, предусмотренных программой основного курса. Углубление реализуется на базе обучения методам и приёмам решения текстовых математических задач, уравнений, содержащих знак модуля, заданий по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия». Каждая задача имеет идейную и техническую сложность (или трудность). Идейная часть решения дает ответ на вопрос как решать задачу. Техническая часть представляет собой реализацию найденной идеи. Подобранные текстовые задачи по математике должны в равной степени способствовать идейной и технической подготовке учащихся. С одной стороны, регулярное идейное обогащение, с другой – развитие технических возможностей, увеличение объёмов проводимых без ошибок выкладок.

С помощью заданий для самостоятельной работы решается конкретная практическая задача – подготовка к письменному экзамену по математике за курс основной школы и к государственному тестированию.

2.1 Методические рекомендации по обучению работы над текстовой задачей в основной школе

Одной из приоритетных целей обучения школьников математике является формирование осознанного умения решать текстовые задачи. Это одна из наиболее сложных проблем, с которой сталкивается учитель при обучении детей математике. Моделирование в обучении математике служит тем методическим приемом, который формирует у учащихся математические понятия и прививает им навыки математических действий. В то же время использование моделей – это организация мыслительной деятельности. В своей практике учитель использует моделирование на уроках математики при обучении решению разных типов задач. Для этого он специальным образом организует деятельность школьников, опираясь при этом на наглядно-образное мышление ребенка, характерное для учащихся основной школы. Следовательно, моделирование задач дает возможность развивать познавательную активность, прививать интерес к предмету, формировать навык решения задач [20].

Рассматривая процесс решения текстовой задачи, неоднократно используется термин «модель», «моделирование». Что мы понимаем под моделированием текстовых задач?

Моделирование в широком смысле этого слова – это замена действий с обычными предметами действия с их уменьшенными образцами, моделями, муляжами, макетами, а также их графическими заменителями: рисунками, чертежами, схемами и т.п. [20].

На необходимость использования моделирования в учебной деятельности указали в своих работах психологи П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов, Л.В. Занков и др.

«Моделирование – процесс построения моделей для каких-либо познавательных целей. Модель – это объект или система, исследование которой служит средством для получения знаний о другом объекте – оригинале или прототипе модели». Можно ли научить каждого ребенка самостоятельно решать задачи? Опыт работы показывает, что это возможно. Следует, прежде всего, улучшить методику организации первичного восприятия и анализа задачи, чтобы обеспечить осознанный и аргументированный выбор арифметического действия каждым учеником.

Поэтому в работе над задачами необходимо уделять большое внимание построению схематических и символических моделей, а также умению работать с отрезками, графически моделировать с их помощью текстовую задачу, ставить вопрос, определять алгоритм решения и поиска ответа.

Рекомендуется использовать различные способы моделирования (построения модели):

- предметное т.е. модель строится с использованием вещественной, предметной наглядности. В этом случае используют демонстрационные программы (например TimeMove). Моделирование на предметной наглядности – самый простой способ моделирования задачи и самый лучший способ организации деятельности учеников на этапе формирования понятия о смысле арифметического действия.

Постепенно заменять предметную наглядность другим способом моделирования простой задачи – графическим моделированием. Такой переход – графическое, т.е. ситуация, предложенная в задаче, изображается с помощью схемы, схематического чертежа, стилизованного рисунка.

При этом надо соблюдать указанные в условии отношения: большее расстояние изображать большим отрезком. Чертеж наглядно иллюстрирует отношение значений величин, а в задачах на движение схематически изображает соответствующую ситуацию.

Знаковое, где составляется краткая запись или заполняется таблица.

Мысленное, в этом случае ученик представляет себе ситуацию в уме и, пользуясь этой воображаемой моделью, может сразу составить запись решения. Это самый высокий уровень моделирования, т.к. моделирование происходит без опоры.

Прежде чем начинать работу по моделированию задач, рекомендуется проводить подготовительную работу, которая заключается в выполнении различных упражнений, позволяющих дать детям представление о символах и знаках используемых при моделировании. Каждая модель выступает как одна из форм отображения сущности задачи, помогающая детям выстроить логическую цепочку умозаключений приводящих к конечному результату.

При анализе данной задачи детям предлагается сразу несколько моделей, для того, чтобы познакомить с разными видами моделирования, во-первых. И, во-вторых, дети почти сразу определяют какая модель им «ближе». Причем делают это индивидуально, выбирая самый оптимальный вариант для себя, что дает положительный результат.

При таком подходе развивается творческое мышление, активизируется мыслительная деятельность, нет закомплексованности, если вдруг предложенная модель не будет «принята» ребенком. И, что самое главное, такая работа при решении даже сложных задач приводит к многообразию способов решения, причем дети делают это самостоятельно [20].

Использование приема моделирования простой задачи с помощью схемы снимает необходимость готовить ученика к решению составных задач как к чему-то новому. Он переносит свое умение на решения составной задачи.

Разница для него только в том, что данных стало больше и характер связей стал более разнообразным.

Освоение моделей – это трудная для обучающихся работа. Причем трудности связаны не с абстрактным характером модели, а с тем, что, моделируя, ученик отображает сущность объектов и отношений между ними. Поэтому обучение моделированию необходимо вести целенаправленно, соблюдая ряд условий:

- применять метод моделирования при изучении математических понятий;
- вести работу по усвоению знаково-символического языка, на котором строится модель;
- систематически проводить работу по освоению моделей тех отношений, которые рассматриваются в задачах.

Чтобы решать задачи самостоятельно школьник должен освоить различные виды моделей, обучаю способам выбора нужной модели, переходу от одной модели к другой.

Мы убеждены, что если у школьников будут сформированы учебные умения и навыки самостоятельной учебной деятельности, им легче будет обучаться на следующих ступенях системы образования. В связи с этим используются различные задания для развития навыков самостоятельности учащихся, активизации их мыслительной деятельности, используя метод моделирования.

2.2 Методические особенности обучения решению задач по теме «Квадратные уравнения»

Решение квадратных уравнений различными способами. Исследование квадратного трёхчлена (некоторые теоретические сведения).

Квадратным трёхчленом называется выражение $ax^2 + bx + c$, при этом $a \neq 0$. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. Коэффициент a определяет направление её ветвей: если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ − вниз. Координаты вершины параболы вычисляются по формулам:

$$x_в = -\frac{b}{2a},\ y_в = \frac{-b^2+4ac}{4a}.$$

Квадратным уравнением называется уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Данное уравнение также называется ***уравнением второй степени с одной переменной***. Выражение $b^2 - 4ac$ называется ***дискриминантом*** квадратного уравнения и обозначается D. ***Корни квадратного уравнения*** находятся по формулам:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ соответствуют абсциссам точек пересечения графика соответствующей функции $y = ax^2 + bx + c$ с осью Ox.

При D = 0 уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет ***равные корни*** $x_1 = x_2$, а парабола
$y = ax^2 + bx + c$ имеет одну точку пересечения с осью Ox.

При D > 0 уравнение имеет ***два действительных различных корня***, что соответствует двум точкам пересечения параболы с осью Ox.

При D < 0 уравнение ***не имеет действительных корней*** и парабола не пересекает ось Ox.

При исследовании квадратного трёхчлена также используется следующая теорема.

Теорема Виета. Сумма корней приведённого квадратного уравнения
$x^2 + px + q = 0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком:

$x_1 + x_2 = - p$, а произведение корней уравнения равно свободному члену:
$x_1 \cdot x_2 = q$.

Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ справедливо $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорем Виета применяется, например, при исследовании знаков корней квадратного уравнения.

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ действительны и ***одного знака***, если $D = b^2 - 4ac \geq 0$, $\frac{c}{a} > 0$.

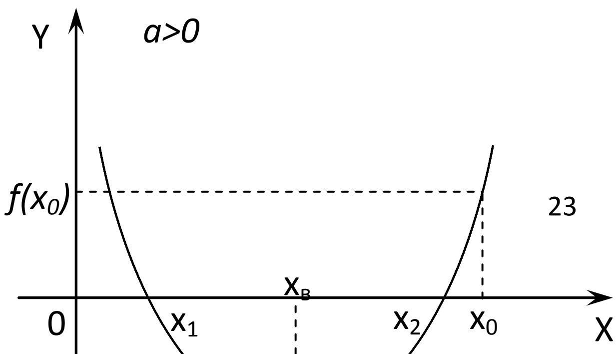
Если же, кроме этого, выполняется условие $-\frac{b}{a} < 0$, то ***оба корня отрицательны***, а если $-\frac{b}{a} > 0$, то ***оба корня положительны***.

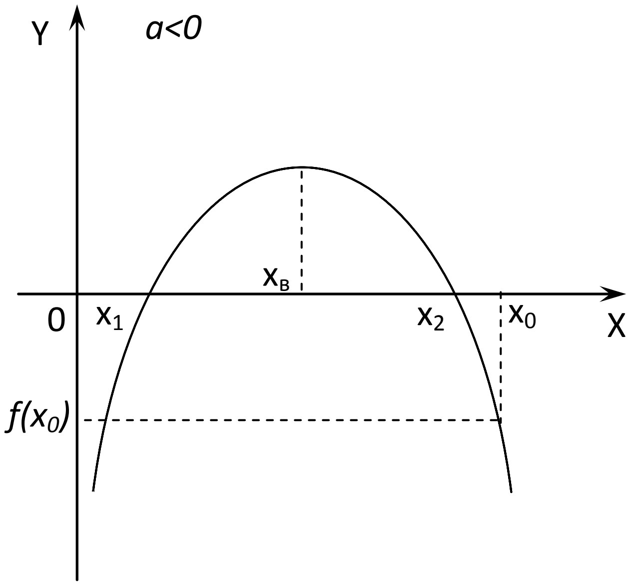
Для того, чтобы корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ были действительны и имели ***разные знаки***, необходимо и достаточно выполнение условий: $D = b^2 - 4ac \geq 0$, $\frac{c}{a} < 0$. При этом положительный корень по модулю больше, если $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$, если же $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$, то отрицательный корень имеет большую абсолютную величину.

При решении некоторых задач необходимо уметь правильно записать условия расположения корней квадратного трёхчлена на координатной прямой. Рассмотрим несколько таких случаев.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, x_0 – некоторое действительное число.

Рассмотрим случай, когда оба корня уравнения меньше заданного числа x_0, т.е. на координатной оси Ox лежат левее, чем точка x_0. Возможны два варианта расположения параболы:



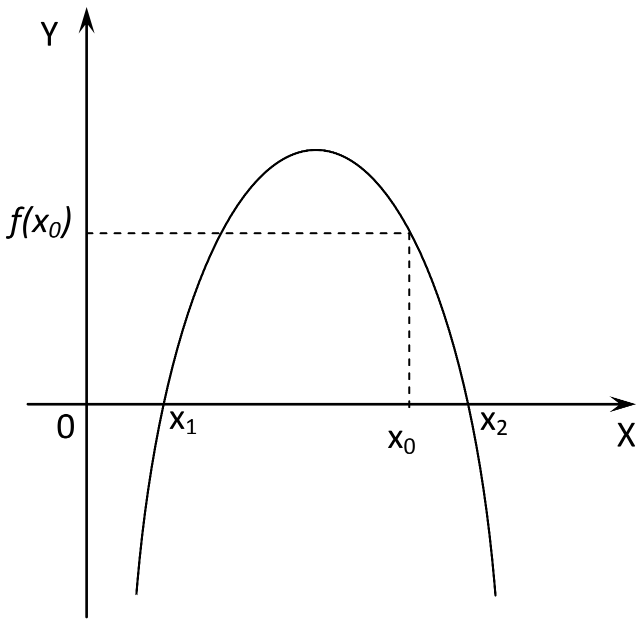


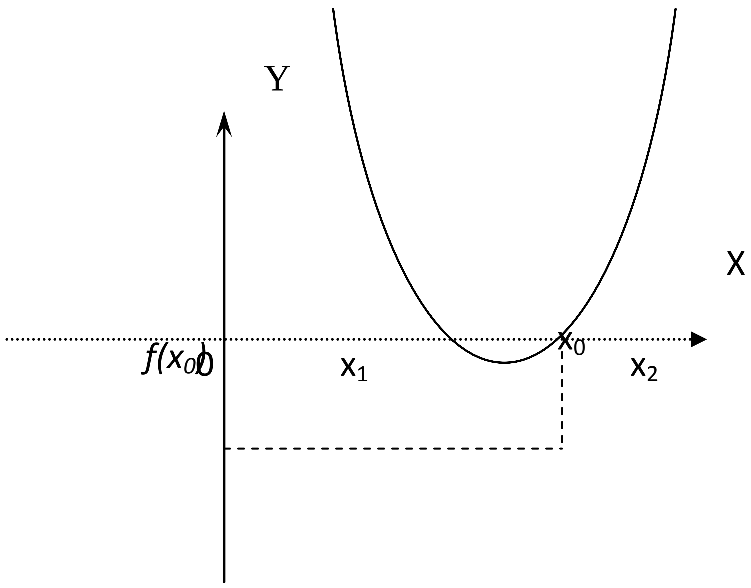
Первый вариант расположения параболы можно описать при помощи следующих неравенств: ветви параболы направлены вверх: a > 0, уравнение имеет два действительных различных корня : D ≥ 0, вершина параболы расположена левее точки x_0: $-\dfrac{b}{2a} < x_0$, в точке x_0 значение квадратного трёхчлена положительно : $f(x_0) > 0$. Аналогично составляются неравенства для второго варианта расположения параболы. Так как выполнение неравенств для каждого варианта должно быть одновременным, то для каждого случая составляем систему неравенств. Имеем:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < x_0, \\ f(x_0) > 0, \end{cases} \quad \text{и, соответственно,} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < x_0, \\ f(x_0) < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим также случай, когда корни уравнения x_1 и x_2 находятся по разные стороны от точки x_0. Здесь также возможны два варианта расположения параболы:

a < 0





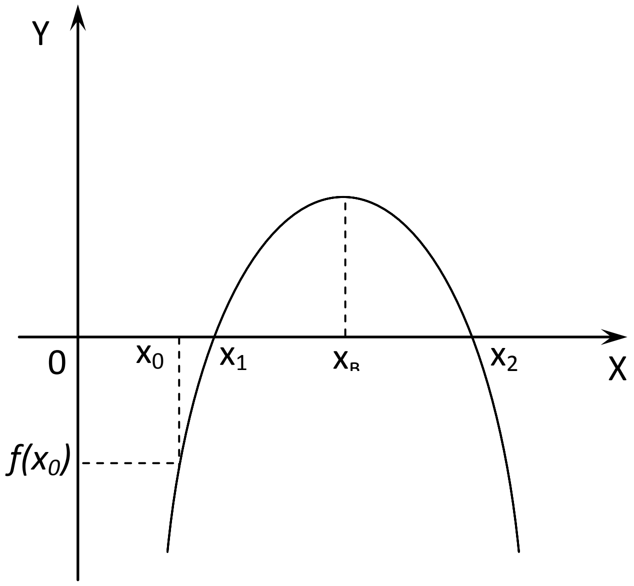
Запишем соответствующие каждому случаю условия:

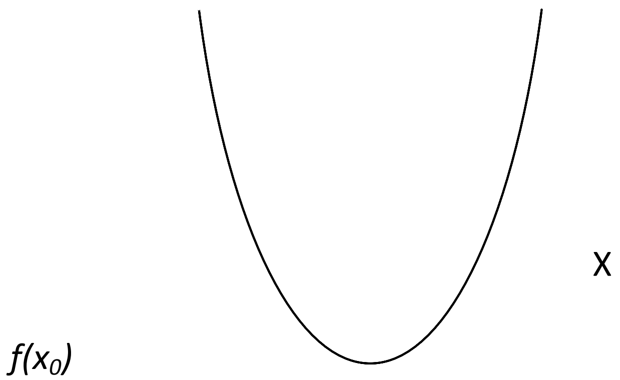
$$\begin{cases} a > 0, \\ D > 0, \\ f(x_0) < 0, \end{cases}$$ и для второго случая $$\begin{cases} a < 0, \\ D > 0, \\ f(x_0) > 0. \end{cases}$$

Так как по условию задачи корни уравнения находятся по разные стороны от точки x_0, значит, они различны: $x_1 \neq x_2$, что возможно только тогда, когда $D > 0$.

Рассмотрим случай, когда оба корня уравнения больше некоторого числа x_0, т.е. лежат на координатной оси правее точки x_0.

a < 0





Системы неравенств, соответствующие данному случаю, имеют вид:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > x_0, \\ f(x_0) > 0, \end{cases}$$ и для второго варианта $$\begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > x_0, \\ f(x_0) < 0. \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение: а) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x+1} = 0$; б) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x-4} = 0$;

в) $\dfrac{2x^2 + 3x - 5}{6x^2 + 17x + 5} = 0$.

Решение. а) $\frac{x^2-3x-4}{x+1}=0$.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x+1\neq 0, \\ x^2-3x-4=0. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы $x^2-3x-4=0$, Д $= 9-4\cdot(-4)=25$, Д > 0, 2 корня. По теореме, обратной теореме Виета, $x_1=4$, $x_2=-1$.

$x=-1$ не удовлетворяет условию $x+1\neq 0$.

Ответ: 4.

б) $\frac{x^2-3x-4}{x-4}=0$.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x-4\neq 0, \\ x^2-3x-4=0. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы $x^2-3x-4=0$, Д $= 9-4\cdot(-4)=25$,Д > 0, 2 корня. По теореме, обратной теореме Виета, $x_1=4$, $x_2=-1$.

$x=4$ не удовлетворяет условию $x-4\neq 0$.

Ответ: -1.

в) $\frac{2x^2+3x-5}{x^2+17x+5}=0$.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2x^2+3x-5=0, \\ x^2+17x+5\neq 0. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы $2x^2+3x-5=0$, Д $= 9-4\cdot2\cdot(-5)=49$, Д > 0, 2 корня,

$x_1=1$, $x_2=-2{,}5$.

Решим второе уравнение системы $x^2+17x+5=0$, Д $= 289-4\cdot6\cdot5=169$, Д $>$ 0, 2 корня,

$x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=-2{,}5$.

Так как при $x=-\frac{1}{3}$, $x=-2{,}5$ знаменатель обращается в нуль, значит, корень уравнения $x=1$.

Ответ: 1.

Пример 2. Решить уравнение: $2x^2+5x=0$.

Решение. $x(2x+5)=0$,

$x=0$ или $2x+5=0$,

$2x=-5$,

$x=-2{,}5$.

Ответ: $-2{,}5$; 0.

Пример 3. Решить уравнение: $(3x+2)(4x+3)=0$.

Решение. $3x+2=0$ или $4x+3=0$,

$3x=-2$, $\quad 4x=-3$,

$x=-\frac{2}{3}$, $\quad x=-\frac{3}{4}$.

Ответ: $-\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{4}$.

Пример 4. Решить уравнение: $(3x + 2)(4x + 3) = 4x + 3$.

Решение. $(3x + 2)(4x + 3) - (4x + 3) = 0$,

$(4x + 3)(3x + 2 - 1) = 0$,

$(4x + 3)(3x + 1) = 0$,

$4x + 3 = 0$ или $3x + 1 = 0$,

$4x = -3$, $\quad 3x = -1$,

$x = -\frac{3}{4}$, $\quad x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{3}$.

Пример 5. Решить уравнение: $(3x + 2)(4x + 3)=(3x + 2)^2$.

Решение. $(3x + 2)(4x + 3) - (3x + 2)^2 = 0$,

$(3x + 2)(4x + 3 - 3x - 2) = 0$,

$(3x + 2)(x + 1) = 0$,

$3x + 2 = 0$ или $x + 1 = 0$,

$3x = -2$ $\quad x = -1$,

$x = -\frac{2}{3}$, $\quad x = -1$.

Ответ: -1; $-\frac{2}{3}$.

Замечание. Деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, содержащее переменную, может привести к потере корней. Поэтому следует перенести все слагаемые в одну часть так, чтобы в другой части уравнения появился нуль, затем вынести данное выражение, как общий множитель, за скобки.

Пример 6. Решить уравнение: $(3x + 2)(4x + 3) = 1$.

Решение. $(3x + 2)(4x + 3) = 1$,

$12x^2 + 9x + 8x + 6 - 1 = 0$,

$12x^2 + 17x + 5 = 0$,

Д $= 17^2 - 4 \cdot 12 \cdot 5 = 289 - 240 = 49$, Д > 0, 2 корня,

$x_1 = \frac{-9+7}{24} = -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12}$,

$x_2 = \frac{-9-7}{24} = -\frac{16}{24} = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{12}$.

Пример 7. Решить уравнение: $4x^2 - 2x - 1 = 0$.

Решение. Так как второй коэффициент 2 − чётное число, то

Д$= (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$, Д > 0, 2 корня,

$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, $x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Рассмотрим решение уравнений ***методом «переброски».*** А именно, рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + вx + c = 0$, где $a \neq 0$. Умножив его обе части на а, получим уравнение $a^2x^2 + авx + ac = 0$. Пусть ах = у, откуда $x = \frac{y}{a}$; тогда придём к уравнению $y^2 + вy + ac = 0$, равносильному данному. Его корни найдём по теореме, обратной теореме Виета. Отсюда окончательно получим $x_1 = \frac{y_1}{a}$ и $x_2 = \frac{y_2}{a}$. Примечание: коэффициент а умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему. Этот способ применим, когда можно легко найти корни, используя теорему, обратную теореме Виета.

Рассмотрим применение ***метода «переброски»*** при решении уравнения $3x^2 - 2x - 5=0$.

«Перебросив» коэффициент 3 к свободному члену, получим уравнение $y^2 - 2y - 15=0$.

Согласно теореме, обратной теореме Виета, получим

$$\begin{cases} y_1 = 5, \\ y_2 = -3; \end{cases} \text{, откуда } \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}, \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

Ответ: -1; $\frac{5}{3}$.

Рассмотрим решение уравнения $3x^2 - 2x - 5=0$, используя ***свойство коэффициентов*** квадратного уравнения, которое заключается в следующем. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + вx + c = 0$, где $a \neq 0$.Если $а - в + с = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Доказательство:

По теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{в}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$ По условию, $а - в + с = 0$, откуда $а + с = в$.

Таким образом, $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\frac{a+c}{a}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -1 \cdot (-\frac{c}{a}), \\ x_1 + x_2 = -1 - \frac{c}{a}; \end{cases}$

Что и требовалось доказать.

Решение. Так как $а - в + с = 0$, т.е. $3 - (-2) + (-5) = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{3}$.

Ответ: -1; $\frac{5}{3}$.

Пример 8. Решить уравнение: $x^2 - (3 + \sqrt{5})x + 3\sqrt{5} = 0$.

Решение. $x^2 - (3 + \sqrt{5})x + 3\sqrt{5} = 0$

Д= $(3 + \sqrt{5})^2 - 4 \cdot 3\sqrt{5} = 9 + 6\sqrt{5} + 5 - 12\sqrt{5} = 14 - 6\sqrt{5}$,

Д > 0, 2 корня,

По теореме, обратной теореме Виета, $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(-(3+\sqrt{5})), \\ x_1 \cdot x_2 = 3\sqrt{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 + \sqrt{5}, \\ x_1 \cdot x_2 = 3\sqrt{5}; \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{5}, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\sqrt{5}$; 3.

Пример 9. При каких значениях а уравнение $a(x^2 - x + 1) = 3x + 5$ имеет два различных корня?

Решение. $a(x^2 - x + 1) = 3x + 5$

$ax^2 - ax + a - 3x - 5 = 0,$

$ax^2 - x(a + 3) + a - 5 = 0,$

Д $= (a + 3)^2 - 4\cdot a\cdot(a - 5) = -3a^2 + 26a + 9,$

Уравнение имеет два различных корня, если Д > 0, при этом $a \neq 0$ (если a=0, то уравнение имеет один корень, что противоречит условию).

Получим систему: $\begin{cases} -3a^2 + 26a + 9\rangle 0, \\ a \neq 0; \end{cases}$ решая которую, получим ответ $(-\frac{1}{3}; 0)\cup(0; 9)$.

Ответ: $(-\frac{1}{3}; 0)\cup(0; 9)$.

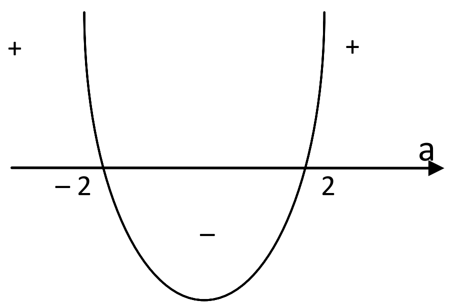
Пример 10. Найдите все значения а, при которых уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Решение. $x^2 - ax + 1 = 0$

Д$=a^2 - 4$.

Для того, чтобы данное уравнение не имело корней необходимо, чтобы его Д < 0.

Решим неравенство $a^2 - 4 < 0$, $(a - 2)(a + 2) < 0$,



$a\in (-2; 2)$.

Ответ : $(-2; 2)$.

Пример 11. Пусть x_1 и x_2 − корни уравнения $x^2+2(к - 3)x + 9 = 0$ ($x_1\neq x_2$). При каких значениях к выполняются неравенства $-6 < x_1 < 1$, $-6 < x_2 < 1$?

Решение. Функция $f(x) = ax^2 + вx + c$ $(a > 0)$ имеет корни x_1 и x_2, заключённые между числами p и q, тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\begin{cases} Д = в^2 - 4ac\rangle 0, \\ f(p)\rangle 0,\ f(q)\rangle 0, \\ p\langle -\frac{в}{2a}\langle q. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (2(к-3))^2 - 4\cdot 9\rangle 0, \\ (-6)^2 + 2(к-3)(-6) + 9\rangle 0, \\ 1^2 + 2(к-3)\cdot 1 + 9\rangle 0, \\ -6\langle -(к-3)\langle 1. \end{cases}$$

Решая систему, получим ответ (6;6,75).

Ответ: (6;6,75).

Пример 12. Дано уравнение $ax^2 + вx + c = 0$. Докажите, что если x_1, x_2, x_3 − попарно различные действительные корни данного уравнения, то $a = в = c$.

Решение. Так как x_1, x_2, x_3 − попарно различные действительные корни уравнения $ax^2 + вx + c = 0$, то $ax_1^2 + вx_1 + c = 0$, (1)

$ax_2^2 + вx_2 + c = 0$, (2)

$ax_3^2 + вx_3 + c = 0$. (3)

Вычтем почленно из равенства (1) равенство (2), получим

$a(x_1^2 - x_2^2) + в(x_1 - x_2) = 0$, $(x_1 - x_2)(a(x_1 + x_2) + в) = 0$, т.к. по условию $x_1 \neq x_2$, то $x_1 - x_2 \neq 0$.

Вычтем из равенства (1) равенство (3), получим

$a(x_1^2 - x_3^2) + в(x_1 - x_3) = 0$, $(x_1 - x_3)(a(x_1 + x_3) + в) = 0$, т.к. по условию $x_1 \neq x_3$, то

$x_1 - x_3 \neq 0$.

Тогда $a(x_1 + x_2) + в = 0$, (4)

$a(x_1 + x_3) + в = 0$. (5)

Вычтем почленно из равенства (4) равенство (5), получим

$a(x_2 - x_3) = 0$, т.к. по условию $x_2 \neq x_3$, $x_2 - x_3 \neq 0$, значит, $a = 0$. Из равенства (4) следует, что $в = 0$. Если подставим эти значения в данное уравнение, получим, что $c = 0$.

Задания для самостоятельного решения.

1. Решите уравнения: а) $3x^2 - 2x - 16 = 0$; б) $3x^2 - 2x + 16 = 0$; в) $3x^2 - 2x - 5=0$.

2. Найдите все значения к, при которых один корень уравнения $(к - 5)x^2 - 2кx + к - 4 = 0$ меньше, а другой больше 2. ***Ответ:*** 13.

3. Найдите все значения к , при которых уравнение $кx^2 - (к - 7)x + 9 = 0$ имеет два равных положительных корня. ***Ответ:*** 49.

4. При каких значениях a парабола $y = (a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6$ расположена выше оси Ox? ***Ответ:*** $a > 6$.

5. Уравнение $5x^2 + 2кx + 5 = 0$ имеет два равных отрицательных корня, если к равно? ***Ответ:*** 5.

6. В уравнении $x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0$ один корень больше другого в два раза при a, равном? ***Ответ:*** − 4.

7. Корни уравнения $x^2 - 4x + q = 0$ удовлетворяют условию $5x_1 + 9x_2 = 0$, если q равно? ***Ответ:*** − 45.

8. Уравнение $mx^2 - 4x + m = 0$ имеет два отрицательных корня, если m принадлежит промежутку? ***Ответ:*** [2; 0).

9. Уравнение, корни которого обратны корням уравнения $15x^2 - 7x - 24 = 0$, имеет вид? ***Ответ:*** $24x^2 + 7x - 15 = 0$.

10. График функции $y = 10ax^2 - 14x - 7$ не имеет общих точек с осью Ox, если a ?

Ответ: $a < - 0,7$.

11. В уравнении $x^2 - 4x + p = 0$ сумма квадратов корней равна 16, если p равно?

Ответ: 0.

12. Парабола $y = 27x^2 - 12x + 4a$ пересекает ось Ox в двух точках, лежащих в правой полуплоскости, если a принадлежит промежутку? ***Ответ:*** $(0; \frac{1}{3})$.

Уравнения, сводящиеся к квадратным. Системы уравнений.

В данной части параграфа рассматривается решение уравнений с модулем, решение уравнений с помощью введения новой переменной, уравнений и систем уравнений с параметром.

Чтобы решить уравнение, содержащее переменную под знаком модуля, надо освободиться от знака модуля, используя определение: $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0, \\ -x, x \leq 0. \end{cases}$ На практике это делается так:

- находят критические точки, т.е. значения переменной при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;
- разбивают область допустимых значений на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;
- на каждом из найденных промежутков решают уравнение без знака модуля.
- совокупность (объединение) решений указанных промежутков и составляет все решения рассматриваемого уравнения.

Пример 1. Решить уравнения: а) $x^2 - |x| - 2 = 0$; б) $2x^2 - |5x - 2| = 0$;

в) $|x^2+x-6| = x^2+x-6$; г) $|2x^2-1| = |x^2 - 2x-3|$.

Решение.

а) $x^2 - |x| - 2 = 0$

$D = 1 - 4\cdot(-2) = 9$, $D > 0$, 2 корня

$|x| = 2$, $|x| = -1$ не подходит по смыслу, т.к. модуль любого числа есть число положительное. Поэтому $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Ответ: -2; 2.

б) $2x^2 - |5x - 2| = 0$.

Найдём критическую точку: $5x - 2 = 0$, $5x = 2$, $x = 0{,}4$.

Решаем уравнение на каждом промежутке:

1) $x < 0{,}4$, $2x^2 + 5x - 2 = 0$, $D = 25 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 41$, $D > 0$, 2 корня

$x_1 = \frac{-5+\sqrt{41}}{2\cdot 2} = \frac{-5+\sqrt{41}}{4}$; $x_2 = \frac{-5-\sqrt{41}}{4}$.

2) $x \geq 0{,}4$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$, $D = 25 - 4\cdot 2\cdot 2 = 9$, $D > 0$, 2 корня

$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$; $x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{-5+\sqrt{41}}{4}$; $\frac{-5-\sqrt{41}}{4}$; $\frac{1}{2}$, 2.

в) $|x^2 + x - 6| = x^2 + x - 6$

По определению модуля $|x^2 + x - 6| = \begin{cases} x^2 + x - 6, x^2 + x - 6 \geq 0, \\ -(x^2 + x - 6), x^2 + x - 6 < 0. \end{cases}$

Получим совокупность двух систем:

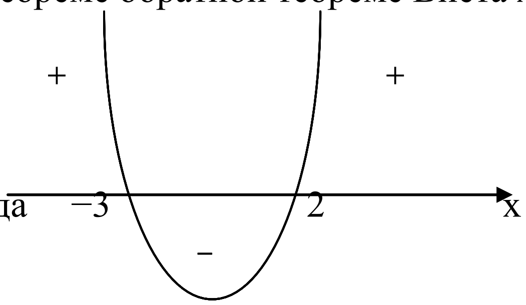
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x-6=x^2+x-6,\\ x^2+x-6\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x-6=-(x^2+x-6),\\ x^2+x-6<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассматривая отдельно решения каждой системы, имеем:

$$\begin{cases}x^2+x-6=x^2+x-6,\\ x^2+x-6\geq 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}0x=0,\\ (x-2)(x-3)\geq 0.\end{cases}$$

$x^2 + x - 6 = 0$, $D = 1 - 4 \cdot (-6) = 25$, $D > 0$, 2 корня

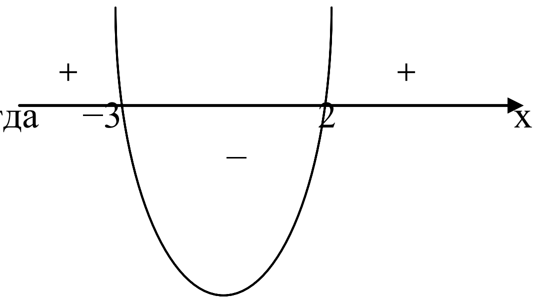
по теореме обратной теореме Виета $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Тогда 

Поэтому решением системы является множество чисел из $(-\infty;-3] \cup [2;+\infty)$.

Найдём решение второй системы:

$$\begin{cases}x^2+x-6=-(x^2+x-6),\\ x^2+x-6<0,\end{cases} \qquad \begin{cases}2x^2+2x-12=0,\\ x^2+x-6<0,\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2+x-6=0,\\ x^2+x-6<0.\end{cases}$$

Тогда 

Поэтому решением системы является множество чисел из (–3;2).

Ответ: $(-\infty;\infty)$.

г) $|2x^2 - 1| = |x^2 - 2x - 3|$.

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}2x^2-1=x^2-2x-3,\\ 2x^2-1=-(x^2-2x-3)\end{array}\right.$$ (по определению модуля).

Найдём корни каждого из уравнений

$2x^2 - 1 = x^2 - 2x - 3$, $2x^2 - 1 - x^2 + 2x + 3 = 0$, $x^2 + 2x + 2 = 0$, $D = 4 - 4\cdot 2 = -4$, $D < -4$, корней нет.

$2x^2 - 1 = -(x^2 - 2x - 3)$, $2x^2 - 1 + x^2 - 2x - 3 = 0$, $3x^2 - 2x - 4 = 0$, $D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 52$, $D > 0$, два корня

$x_1 = \frac{2-\sqrt{52}}{3\cdot 2} = \frac{2-2\sqrt{13}}{3\cdot 2} = \frac{2(1-\sqrt{13})}{2\cdot 3} = \frac{1-\sqrt{13}}{3}$,

$x_2 = \frac{2+\sqrt{52}}{3\cdot 2} = \frac{2+2\sqrt{13}}{3\cdot 2} = \frac{2(1+\sqrt{13})}{3\cdot 2} = \frac{1+\sqrt{13}}{3}$.

Ответ: $\frac{1-\sqrt{13}}{3}$; $\frac{1+\sqrt{13}}{3}$.

Пример 2. При каких значениях а уравнение $|x^2 - 2ax| = 1$ имеет три различных корня?

Решение. По определению модуля:

$x^2 - 2ax = 1$, $x^2 - 2ax - 1 = 0$,

$x^2 - 2ax = -1$, $x^2 - 2ax + 1 = 0$.

Найдём дискриминант первого уравнения:

$D = b^2 - 4ac = 4a^2 - 4\cdot(-1) = 4a^2 + 4$, $D > 0$, 2 корня.

Чтобы уравнение имело три различных корня, необходимо, чтобы дискриминант второго уравнения был равен нулю.

Найдем дискриминант второго уравнения:

$D = b^2 - 4ac = 4a^2 - 4$. Решим уравнение $4a^2 - 4 = 0$, $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$.

Получим ответ: $a_1 = 1$; $a_2 = -1$.

Ответ: при $a = -1$, $a = 1$.

Пример 3. При каких значениях m система уравнений:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = .m, \end{cases}$ имеет: а) одно решение; б) два решения?

Решение. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = m, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x = m + y, \end{cases}$ $\begin{cases} (m + y)^2 + y^2 = 5, \\ x = m + y, \end{cases}$ $\begin{cases} m^2 + 2my + y^2 + y^2 = 5, \\ x = m + y, \end{cases}$

$\begin{cases} 2y^2 + 2my + m^2 - 5 = 0, \\ x = m + y. \end{cases}$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$2y^2 + 2my + m^2 - 5 = 0$, найдём его дискриминант

$D = (2m)^2 - 4\cdot 2\cdot(m^2 - 5) = = 4m^2 - 8m^2 + 40 = -4m^2 + 40$.

а) Для того, чтобы уравнение имело один корень, необходимо, чтобы дискриминант был равен нулю, получим уравнение $-4m^2 + 40 = 0$, решением которого являются $\pm\sqrt{10}$.

б) Для того, чтобы имело два корня, необходимо, чтобы дискриминант был больше нуля. Поэтому $-4m^2 + 40 > 0$, $m^2 - 10 < 0$, $(m - \sqrt{10})(m + \sqrt{10}) < 0$.

Решением неравенства является множество чисел из $(-\sqrt{10}; \sqrt{10})$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{10}$; б) $(-\sqrt{10}; \sqrt{10})$.

Рассмотрим решение уравнений *методом введения новой переменной.*

Пример 4. Решите уравнения: а) $(x^2+2x)(x^2+2x-2)=3$;

б) $(x^2 - 2x - 5)^2 - 2(x^2 - 2x - 5) = 3$.

Решение. а) $(x^2+2x)(x^2+2x-2)=3$.

Пусть $x^2 + 2x = t$, тогда $t(t-2) = 3$, $t^2 - 2t - 3 = 0$, $D = 4 - 4\cdot(-3) = 16$, $D > 0$, 2 корня

$t_1 = -1$, $t_1 = 3$.

Получим

$x^2 + 2x = 3$, и $x^2 + 2x = -1$,

$x^2 + 2x - 3 = 0$, $x^2 + 2x + 1 = 0$,

D=16, D>0 $(x+1)^2 = 0$,

по теореме, обратной теореме Виета, $x = -1$,

$x_1=3$, $x_2= -1$.

Ответ: − 1; 3.

б) $(x^2 - 2x - 5)^2 - 2(x^2 - 2x - 5) = 3$.

Пусть $x^2 - 2x - 5 = t$, тогда $t^2 - 2t = 3$, $t^2 - 2t - 3 = 0$, $D = 4 - 4\cdot(-3) = 16$, D>0, 2 корня

по теореме, обратной теореме Виета, $t_1=3$, $t_2 = -1$,

Получим $x^2 - 2x - 5 = 3$ и $x^2 - 2x - 5 = -1$,

$x^2 - 2x - 8 = 0$ $x^2 - 2x - 4 = 0$

$D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 36$, $D > 0$, $D = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot(-4) = 20$, $D > 0$,

2 корня, по теореме, обратной теореме 2 корня, $x_1 = \frac{2-\sqrt{20}}{2} = 1-\sqrt{5}$,

Виета, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. $x_2 = \frac{2+\sqrt{20}}{2} = 1+\sqrt{5}$.

Ответ: -2; $1 - \sqrt{5}$; $1 + \sqrt{5}$; 4.

Пример 5. Решите уравнение: $x(x + 2)(x + 3)(x + 5) = 72$.

Решение. Перегруппируем сомножители и преобразуем полученное уравнение:

$(x + 2)(x + 3)(x + 5)x = 72$, $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x) = 72$.

Обозначим $y = x^2 + 5x$, тогда получим уравнение $(y + 6)y = 72$ или

$y^2 + 6y - 72 = 0$.

корни этого уравнения: $y_1 = 6$; $y_2 = -12$.

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$x^2 + 5x = 6$ или $x^2 + 5x = -12$.

Первое уравнение имеет корни $x_1 = 1$; $x_2 = -6$. Второе уравнение корней не имеет, так как его $D = 25 - 48 = -23 < 0$.

Ответ: – 6; 1.

Пример 6. Решите уравнение: $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$.

Решение. О.Д.З.: $x \neq 0$.

Пусть $x + \frac{1}{x} = y$, тогда $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2$.

Отсюда $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 = y^2$, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = y^2 - 2$.

Получим уравнение: $y^2 - 2 + y - 4 = 0$, $y^2 + y - 6 = 0$, $D = 1 - 4\cdot(-6) = 25$, $D > 0$,

2 корня. По теореме, обратной теореме Виета, $y_1 = 2$, $y_2 = -3$.

Т.к. $x+\frac{1}{x}$ = у, то $x+\frac{1}{x}$ = 2, откуда $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$, x = 1.

Т.к. $x+\frac{1}{x}$ = у, то $x+\frac{1}{x}$ = − 3, $x^2 + 3x + 1 = 0$, D = 9 – 4 = 5, D > 0, 2 корня

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$; 1.

Пример 7. Решите уравнение: $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2\frac{1}{2}$.

Решение. Д.З.: $x \neq 0$.

Пусть $\frac{x}{x^2+1}$ = t, тогда подставляя в уравнение, получим $\frac{1}{t}$ + t = $2\frac{1}{2}$, умножая обе части уравнения на 2t, имеем $2 + 2t^2 - 5t = 0$, $2t^2 - 5t + 2 = 0$,

D = 25 – 4·2 ·2 =9, D > 0, 2 корня, $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Значит, $\frac{x}{x^2+1} = 2$ и $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$.

Найдём корни уравнения $\frac{x}{x^2+1}$ = 2, $\frac{x}{x^2+1} - 2 = 0$, $\frac{x-2x^2-2}{x^2+1} = 0$, $x^2 + 1 \neq 0$, поэтому $-2x^2 + x - 2 = 0$, $2x^2 - x + 2 = 0$, D = 1 − 4·2·2 = − 15, D < 0, корней нет.

Найдём корни уравнения $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, $\frac{2x-x^2-1}{x^2=1} = 0$, $x^2 + 1 \neq 0$, поэтому

$-x^2 + 2x - 1 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$, x = 1.

Ответ: 1.

Пример 8. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+2xy=16, \\ y^2-xy=3; \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} x^2+2xy=16, \\ y^2-xy=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2xy=16, \\ 2y^2-2xy=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2y^2=22, \\ y^2-3=xy; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+2y^2=22, \\ \frac{y\ \ -3}{y}=x;\ y\neq 0. \end{cases}$ Рассмотрим первое уравнение системы: $\left(\frac{y^2-3}{y}\right)^2+2y^2=22,$

$\frac{y^4-6y^2+9}{y^2}$ $+2y^2 = 22$, $y^4 - 6y^2 + 9 + 2y^4 - 22y^2 = 0$, $3y^4 - 28y^2 + 9 = 0$,

пусть $y^4 = t$, тогда $3t^2 - 28t + 9 = 0$, D = 676, D > 0, 2 корня

$t_1 = \frac{28+26}{6} = 9$, $t_2 = \frac{28-26}{6} = \frac{1}{3}$, тогда $y^2 = 9$, $y = \pm 3$ и $y^2 = \frac{1}{3}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Подставляя найденные значения во второе уравнение системы, получим

x = 2,   x = − 8,

x = −2,   x = 8.

Ответ: (− 2; − 3), (2;3), $\left(-8;\frac{1}{3}\right)$, $\left(8;-\frac{1}{3}\right)$.

Пример 9. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8}, \\ x+y=12. \end{cases}$

Решение. О.Д.З. $x \neq 0$, $y \neq 0$,

$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8}, \\ x+y=12; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{8}, \\ x+y=12; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{12}{xy}=\dfrac{3}{8}, \\ x+y=12; \end{cases}$ $\begin{cases} 96=3(12-y)y, \\ x=12-y; \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-12y+32=0, \\ x=12-y; \end{cases}$

Решим первое уравнение системы $y^2 - 12y + 32 = 0$, $D = 12^2 - 4\cdot 32 = 144 - 128 = 16$, $D > 0$, 2 корня. По теореме, обратной теореме Виета, $y_1 = 4$, $y_2 = 8$. Тогда $x_1 = 12 - 4 = 8$, $x_2 = 12 - 8 = 4$.

Ответ: (8 ; 4), (4 ; 8).

Задания для самостоятельного решения.

1. Решите уравнение: а) $|x+2|=\dfrac{2}{3-x}$; б) $|x^2+x|+3x-5=0$; в) $x^2 + |x-2| - 10 = 0$;

г) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$; д) $|x-6|=|x^2-5x+9|$; е) $|x^2-4x|=5$; ж) $|x^2-1|+x=5$;

з) $|x^2+4x+2|=\dfrac{5x+16}{2}$; и) $\dfrac{5}{3-|x-1|}=|x|+2$; к) $|x-4{,}2|(x-4{,}2)=-1$.

Ответ: а) $\dfrac{1-\sqrt{33}}{2};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$; б) $-5;1$; в) 3; $\dfrac{1-\sqrt{33}}{2};\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$;

г) нет корней; д) 1;3; е) $-1;5$; ж) -3; 2 ; з) $-\dfrac{1}{3}$; 1 ; и) 3; $-2+\sqrt{5}$; к) 3,2.

2. Найдите корни уравнения:

а) $(y+2)^4 - (y+2)^2 = 12$;

б) $(2x^2 + 7x - 8)(2x^2 + 7x - 3) = 6$;

в) $2x^8 + 5x^4 - 7 = 0$; г) $\dfrac{4}{x}+5=\dfrac{1}{x^2}$; д) $(2x^2+3x)^2 - 7(2x^2+3x) = -10$;

е) $(x+2)^2 + \dfrac{24}{x^2+4x} = 18$; ж) $\dfrac{1}{x^2+2x+4}-\dfrac{1}{x^2+2x+5}=\dfrac{1}{12}$; з) $\dfrac{5}{x(x+4)}+\dfrac{8}{(x+1)(x+3)}=2$.

Ответ: а) -4; 0 ; б) $\dfrac{-7-\sqrt{65}}{4};-4{,}5;\dfrac{-7+\sqrt{65}}{4};4$; в) -1 ; 1; г) -1; 0,2; д) $-2{,}5$; -2; 0,5; 1; е) -6 ; 2 ; $-2-\sqrt{6}$; $-2+\sqrt{6}$; ж) -1; з) -5; 1; $\dfrac{-4+\sqrt{10}}{2};\dfrac{-4-\sqrt{10}}{2}$.

3. Решите уравнения: а) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 5x - \dfrac{5}{x} + 6 = 0$; б) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 3x + \dfrac{3}{x} = 2$;

в) $2\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)+3\left(x-\dfrac{2}{x}\right)-13=0$.

Ответ: а) $2 \pm \sqrt{3}$; б) $-2 \pm \sqrt{3}$; в) -1; 2; $\dfrac{-5+\sqrt{57}}{2};\dfrac{-5-\sqrt{57}}{2}$.

4. Решите уравнения: а) $\dfrac{x^2+2}{3x-2}-\dfrac{3x-2}{x^2+2}=2\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}=4.$

Ответ: а) 1; 8; б) $-\sqrt{5};\sqrt{5};1-\sqrt{6};1+\sqrt{6}.$

5. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x^2+xy=3, \\ y^2-xy=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+2xy=8, \\ y^2-2xy=-3. \end{cases}$

Ответ: а) $(1;2)$, $(-1;-2)$, $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{6}{x-y}-\dfrac{8}{x+y}=-2, \\ \dfrac{9}{x-y}+\dfrac{10}{x+y}=8. \end{cases}$

Ответ: а) (2 ; 3); б) (2,5; − 0,5)

2.3 Методические особенности обучения решению текстовых задач по теме «Решение задач с помощью квадратных уравнений»

Задачи на числа

При решении задач на числовые зависимости необходимо помнить о том, что :

- ✓ Если натуральное число А содержит в своей записи n знаков, т.е. имеет вид $A=a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1a_0$, где a_0 − число единиц, a_1 − число десятков и т.д., то это число можно записать в виде $A = a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_{n-2}\cdot 10^{n-2} + a_{n-3}\cdot 10^{n-3} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0$.

Например, число А = 5469 запишется в виде 5469 = 5·1000 + 4·100 + 6·10 + 9.

Если в задаче в качестве неизвестных x, y, … , z выбраны цифры записи числа А, то принято обозначать A= $\overline{xy...z}$.

- ✓ Если при делении натурального числа А на натуральное число В получено частное q и остаток r, то A = B·q + r.
- ✓ Если три числа А, В, С относятся друг к другу как m:n:k, то

$A = \dfrac{m\cdot M}{m+n+k}$, $B = \dfrac{n\cdot M}{m+n+k}$, $C = \dfrac{k\cdot M}{m+n+k}$, где M = A + B + C, т.е. каждое из этих чисел составляет соответствующую часть их суммы.

Задачи на числа можно отнести к так называемым ***текстовым*** задачам. Главное при решении таких задач − записать словесные условия при помощи уравнений или неравенств. Для этого необходимо внимательно (и, возможно, не один раз) прочитать условие задачи с тем, чтобы стало понятным её содержание, затем, при очередном прочтении условия задачи, нужно постепенно вводить неизвестные и сразу записывать связи между неизвестными величинами в виде уравнений или неравенств. Иногда из полученной системы уравнений или неравенств требуется найти лишь одну неизвестную или некоторую комбинацию неизвестных. При этом не обязательно находить значения всех неизвестных, что может быть сделано далеко не всегда.

Решение задач на составление уравнений (или систем уравнений) обычно осуществляется в три этапа:

1) выбор неизвестного, обозначаемого, как правило, через x (или нескольких неизвестных, обозначаемых $x, y, z, \ldots$), и составление уравнения (или системы уравнений), связывающего некоторой зависимостью выбранное неизвестное с величинами, заданными условием задачи;
2) решение полученного уравнения (или системы уравнений);
3) отбор решений по смыслу задачи.

Пример 1. Найдите три последовательных положительных чётных числа, если квадрат большего из них равен сумме квадратов двух других.

Решение. Обозначим числа $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$. По условию задачи составим уравнение:

$(2n + 4)^2 = (2n)^2 + (2n + 2)^2$,

$4n^2 + 16n + 16 = 4n^2 + 4n^2 + 8n + 4$,

$4n^2 - 8n - 12 = 0$,

$n^2 - 2n - 3 = 0$, Д $= 4 - 4 \cdot(-3) = 16$, Д > 0, 2 корня.

По теореме, обратной теореме Виета, $n_1 = 3$, $n_2 = -1$ не удовлетворяет условию задачи, т.к. $n > 0$.

При $n = 3$ получим числа 6; 8; 10.

Ответ: 6; 8; 10.

Пример 2. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 10. Если от искомого числа отнять 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

Решение. Пусть х − число десятков, у − число единиц. Так как сумма квадратов цифр равна 10, то получим уравнение $x^2 + y^2 = 10$. По условию задачи получим систему уравнений:

$$\begin{cases} X^2 + У^2 = 10, \\ (10X + У) - 18 = 10У + X; \end{cases} \qquad \begin{cases} X^2 + У^2 = 10, \\ 10X - 10У + У - X = 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^2 + У^2 = 10, \\ 10(X - У) - (X - У) = 18; \end{cases} \qquad \begin{cases} X^2 + У^2 = 10, \\ 9(X - У) = 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^2 + У^2 = 10, \\ X - У = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} (У + 2)^2 + У^2 = 10, \\ X = У + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} У_1 = 1, У_2 = -3, \\ X_1 = 3, X_2 = -1; \end{cases} \text{ с учётом условия задачи, } \begin{cases} X = 3, \\ У = 1. \end{cases}$$

Ответ: 31.

Пример 3. Найдём двузначное число, если известно, что единиц в нём на 2 больше, чем десятков, и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

Решение. Пусть в искомом числе x единиц. Тогда в нём $(x - 2)$ десятков, и, следовательно, оно равно $(x - 2)10 + x = 11x - 20$. Сумма цифр искомого числа равна $(x - 2) + x = 2x - 2$. Таким образом, получаем следующее уравнение:

$(11x - 20)\cdot(2x - 2) = 144$.

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 4$ и $x_2 = \frac{13}{11}$.

Так как x и (x − 2) — это цифры числа, то $x \in N$ и

$$\begin{cases} 0 \le x \le 9, \\ 0 \le x-2 \le 9 \end{cases}$$

Из найденных значений x этим условиям удовлетворяет только значение $x_1 = 4$. Тогда искомым числом является число 24.

Ответ: 24.

Пример 4. Найдём два двузначных числа, о которых известно следующее: если к первому числу приписать справа второе число, а затем ещё цифру 0, то получится пятизначное число, которое при делении на квадрат второго числа дает в частном 39, а в остатке 575; если же к первому числу приписать справа второе и затем из составленного таким образом числа вычесть другое число, полученное приписыванием справа первого числа ко второму, то разность будет равна 1287.

Решение. Пусть x — первое число и y — второе. После приписывания справа числа y к числу x получится четырёхзначное число $x \cdot 100 + y$, а после приписывания к этому числу справа цифры 0 получится $(x \cdot 100 + y) \cdot 10$. Так как при делении этого числа на число y^2 в частном получится 39 и в остатке 575, то

$(x \cdot 100 + y)10 = y^2 \cdot 39 + 575$.

Это - первое уравнение составляемой системы уравнений. После приписывания справа двузначного числа x *к* двузначному числу y получится четырёхзначное число $y \cdot 100 + x$.

Таким образом, получаем второе уравнение:

$(x \cdot 100+y) - (y \cdot 100+x) =1287$.

Итак, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 1000x + 10y = 39y^2 + 575, \\ 99x - 99y = 1287. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: (48; 35) и $(\frac{152}{39}; -\frac{355}{39})$.

По смыслу задачи x и y — натуральные числа, причём $10 \le x \le 99$. Из найденных решений этим условиям удовлетворяет только первое решение, т.е. искомыми являются числа 48 и 35.

Ответ: 35 и 48.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Если числитель обыкновенной дроби увеличить на 7, а знаменатель возвести в квадрат, то получится, равная $\frac{3}{4}$. Если же числитель оставить без изменения, а знаменатель увеличить на 6, то получится дробь, равная $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь. ***Ответ:*** $\frac{5}{4}$.

2. Произведение двух чисел в 15 раз больше их суммы. Если к первому числу прибавить удвоенное второе число, то получится 100. Найдите эти числа. ***Ответ:*** 20 и 60; 25 и 37,5.

3. Найдите двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр и в 2 раза больше произведения его цифр. ***Ответ:*** 36.

4. В зрительном зале кинотеатра было 320 мест, расположенных одинаковыми рядами. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили ещё один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале? ***Ответ:*** 21.

5. Разность цифр двузначного числа равна 2, а сумма квадратов этих же цифр равна 52. Найдите это число. ***Ответ:*** 46; 64. ***Указание:*** при решении задачи учтите, что цифра десятков искомого числа может быть как больше цифры единиц, так и меньше этой цифры.

6. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке − 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найдите это число.

Ответ: 63.

Задачи на проценты

При решении задач на проценты необходимо помнить, что:

- Процент − это ***сотая часть числа***. Если данное число принять за 1, то 1% составляет 0,01 этого числа, 23% составляют 0,23 этого числа и т.д. Поэтому, заменяя проценты соответствующим количеством сотых долей числа, задачу на проценты сводят к задаче на части.

- Чтобы найти а % от числа В, нужно число В разделить на 100 и умножить на а, т.е. $\frac{B \cdot a}{100}$. Например, найти 45% от числа 56. Имеем $\frac{45 \cdot 56}{100}$ = 25,2, т.е. число 25,2 составляет 45% от числа 56.

- Если известно, что а % числа Х равно b, то число Х находится по формуле Х = $\frac{b \cdot 100}{a}$. Эту формулу можно не запоминать, зная пропорцию: $\begin{matrix} X - 100\% \\ b - a\% \end{matrix}$, откуда $\frac{X}{b} = \frac{100}{a}$. Используя эту пропорцию, можно найти любое из чисел Х, а, b при условии, что известны остальные.

- Чтобы найти процентное отношение чисел а и b, нужно отношение этих чисел умножить на 100%, т.е. $\frac{a}{b} \cdot 100\%$.

- Если величина а за некоторый промежуток времени (единицу времени) вырастет на р %, то через n единиц времени эта величина станет равной N=a$\left(1 + \frac{pn}{100}\right)$. Но при этом предполагается, что по истечении каждой единицы времени прирост за этот промежуток времени не присоединяется к а, так что за новый период времени прирост начисляется с первоначальной величины.

- Если величина а за единицу времени возрастает на р % и прирост присоединяется к величине а (т.е. она становится равной а + $\frac{ap}{100}$), а за прирост за новый период времени исчисляется с наращенной суммы, то по истечении n единиц времени заданная величина станет равной N=a$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ −эта формула называется формулой ***сложных процентов.*** В задачах на банковские расчёты, как правило, считают, что речь идёт о сложных процентах.

Пример 1. Цена товара была дважды снижена на одно и то же число процентов. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 20 р., а окончательная − 11р.25к.?

Решение. Пусть цена снижалась каждый раз на x %. Это значит, что после первого снижения цена товара стала меньше на $\frac{x}{10}$ частей первоначальной стоимости, т.е. цена товара стала $20\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)$р. После второго снижения цена товара стала $\left(1-\frac{x}{100}\right)$частей стоимости после первого снижения, т.е. цена товара стала $20\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)$р.

Но по условию задачи после двух снижений товар стал стоить 11р.25к. Значит,

$$20\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)^2 = 11{,}25$$

$$20\cdot\left(1-\frac{2x}{100}+\frac{x^2}{10000}\right)=11\frac{1}{4}$$

$$20-\frac{2}{5}x+\frac{x^2}{500}=\frac{45}{4}$$

$$\frac{x^2}{125}-\frac{8}{5}x+80-45=0$$

$$\frac{x^2}{125}-\frac{8}{5}x+35=0$$

$$x^2-200x+35\cdot125=0$$

$$x^2-200x+4375=0$$

Решая уравнение, находим его корни:

$x_1 = 175$, $x_2 = 25$.

Поскольку снизить цену товара на 175% нельзя, то условию задачи удовлетворяет x = 25.

Ответ: цену каждый раз снижали на 25%.

Пример 2. Свежие грибы содержат по массе 90 % воды, а сухие − 12% воды.

Сколько получится сухих грибов из 22 килограммов свежих грибов?

Решение. Пусть 22 кг грибов составляют 100% , x кг воды составляют 90%. Тогда 22 кг свежих грибов содержат воды x = $\frac{22\cdot90}{100}$ = 19,8 кг, значит, на сухое вещество приходится 22 − 19,8 = 2,2 кг. Это же вещество составляет 100% − 12% = 88% в сухих грибах, составим пропорцию:

2,2 — 88%

x — 100%, найдём $x = \frac{2,2 \cdot 100}{88} = 2,5$ кг.

Ответ: получится 2,5 кг сухих грибов.

Задачи для самостоятельного решения

1. В двух школах посёлка было 1500 учащихся. Через год число учащихся первой школы увеличилось на 10 %, а второй − на 20%, и в результате общее число учащихся стало равным 1720. Сколько учащихся было в каждой школе первоначально? ***Ответ:*** 700 учащихся, 800 учащихся.

2. На первом поле 65% площади засеяно овсом. На втором поле под овсом занято 45% площади. Известно, что на первом и втором полях вместе под овсом занято 53% общей площади. Какую часть всей засеянной площади составляет каждое поле? ***Ответ:***

3. Букинистический магазин продал книгу со скидкой в 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально предполагал получить магазин?

Ответ:

Задачи на движение

Основными компонентами задач на движение являются: ***пройденный путь (S),скорость (V)*** и ***время (t)***. Зависимости между этими величинами выражаются формулами:

$$S = V \cdot t; \qquad V = \frac{S}{t}; \qquad t = \frac{S}{V}.$$

Указанные величины должны быть в одной системе единиц.

При решении задач на движение рекомендуется использовать следующие указания:

- Движение считается равномерным, если нет специальных оговорок.
- Скорость считается величиной положительной.
- Всякие переходы на новый режим движения, на новое направление движения считаются происходящими мгновенно.
- Если тела начинают двигаться одновременно, то в случае их встречи каждое из них с момента выхода до момента встречи затрачивает ***одинаковое*** время.
- Если тела выходят в разное время и одно догоняет другое, то до момента встречи больше времени затрачивает то из них, которое выходит раньше.
- Если одно тело, скорость которого x, ***догоняет*** другое, движущееся со скоростью y ($y < x$), то ***скорость сближения*** тел равна $x - y$. При этом, если в начале движения тела находились на расстоянии S друг от друга, то расстояние между ними будет равно a через $\frac{S+a}{x-y}$ единиц времени, а первое ***догонит*** второе через $\frac{S}{x-y}$ единиц времени.

- Если тела, находящиеся на расстоянии S друг от друга, движутся ***навстречу*** друг другу со скоростями x и y, то скорость их ***сближения*** равна

x + y, а их ***встреча*** произойдёт через $\frac{S}{x+y}$ единиц времени.

- Если тело с собственной скоростью x движется по реке, скорость

течения которой y, то скорость движения тела ***по течению*** равна x + y, а скорость ***против течения*** равна x − y.

- Если два тела, скорости которых x и y (x > y), движутся вниз по реке, скорость течения которой равна z, то скорость ***удаления*** первого тела от второго равна (x + z) − (y + z) = x − y. Если же эти тела движутся навстречу друг другу (первое вниз, второе вверх по течению), то скорость ***сближения*** тел равна (x + z) + (y − z) = x + y.

Для лучшего понимания условий задачи полезно делать чертёж.

Пример 1. Из пункта *А* в пункт *В* отправляются три велосипедиста. Первый из них едет со скоростью 10 км/ч. Второй отправляется через полчаса после первого и едет со скоростью 8 км/ч. Какова скорость третьего велосипедиста, если известно, что он выезжает через полчаса после второго и что он догоняет первого через 4 ч после того, как он догонит второго?

Решение. Выразим время, которое потребуется третьему велосипедисту, чтобы догнать первого и второго велосипедистов.

Пусть скорость третьего велосипедиста равна *x* км/ч. Тогда, сокращая расстояние до первого велосипедиста по *(x*—10) километров в час, отставание, образовавшееся за 1 ч и, следовательно, равное 10 км, третий велосипедист покроет за $\frac{10}{x-10}$ ч.

Аналогично второго велосипедиста третий догонит за $\frac{4}{x-8}$ ч.

(4 км — расстояние между третьим и вторым велосипедистами в момент старта третьего.) Таким образом, получаем следующее уравнение:

$$\frac{10}{x-10} - \frac{4}{x-8} = 4.$$

Из этого уравнения находим $x_1 = 12$, $x_2 = 7{,}5$. По смыслу задачи скорость третьего велосипедиста должна быть больше, чем скорости первого и второго велосипедистов, т. е. x > 10. Из найденных решений этому условию удовлетворяет только x = 12. Итак, скорость третьего велосипедиста равна 12 км/ч.

Ответ: 12 км/ч.

Пример 2. Из пункта *А* в пункт *В* выехал грузовой автомобиль, через час из А в В выехал легковой автомобиль. В пункт *В* машины прибыли одновременно. Если бы из пунктов *А* и *В* машины выехали одновременно навстречу друг другу, то встреча произошла бы через 1 ч 12 мин после их выезда. Найдём время, за которое проедет путь от А до В грузовик.

Решение. Пусть грузовик проезжает путь от *А* до *В* за *x* ч. Тогда легковой автомобиль проедет этот путь за *(x* – 1) ч. Принимая путь *АВ* равным *y* км, найдем, что скорость грузового автомобиля равна $\frac{y}{x}$ *км/ч,* а легкового $\frac{y}{x-1}$ км/ч.

Так как при движении навстречу автомобили сближаются со скоростью $\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{x-1}\right)$км/ч, а весь путь они проезжают за $\frac{6}{5}$ ч, то получаем следующее уравнение:

$$\frac{6}{5}\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{x-1}\right)=y.$$

В этом уравнении величины две. Однако после деления обеих частей уравнения на $y \neq 0$ получим уравнение

$$\frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)=1,$$

содержащее уже только искомую величину x. Решая это уравнение, находим $x_1=3$, $x_2=0{,}4$.

По смыслу задачи $x > 1$. Более того, ясно, что грузовик проедет путь АВ за время большее чем $\frac{6}{5}$ ч, т.е. $x > \frac{6}{5}$. Из найденных значений x, таким образом, следует отобрать только x=3. В итоге приходим к выводу, что время, за которое грузовик проезжает путь от А до В, равно 3 ч.

Ответ: 3 ч.

Пример 3. Из пунктов А и Б навстречу друг другу одновременно выехали два велосипедиста. После встречи первый ехал 4 часа до пункта Б, а второй 9 часов до пункта А. Сколько часов был в пути каждый велосипедист?

Решение. Пусть S км − расстояние от пункта А до пункта Б,

t ч − время движения велосипедистов до встречи,

t + 4 ч − время, затраченное на весь путь первым велосипедистом,

t + 9 ч − время, затраченное на весь путь вторым велосипедистом,

$\frac{S}{t+4}$ км/ч − скорость первого велосипедиста,

$\frac{S}{t+9}$ км/ч − скорость второго велосипедиста.

За время t первый велосипедист проехал путь $t\cdot\frac{S}{t+4}$, а второй − путь $t\cdot\frac{S}{t+9}$. Весь путь $S = t\cdot\frac{S}{t+4} + t\cdot\frac{S}{t+9}$, $1= t\left(\frac{1}{t+4}+\frac{1}{t+9}\right)$. В результате преобразования данного уравнения, получим уравнение $t^2 = 36$, корнями которого являются числа $t = \pm 6$. Значение $t = -6$ не подходит по условию задачи. Значит, t = 6. Получаем t + 4 = 6 + 4 = 10 ч − время, затраченное на весь путь первым велосипедистом, а t + 9 = 6 + 9 = 15 ч − время, затраченное на весь путь вторым велосипедистом.

Ответ: 10 часов был в пути первый велосипедист, 15 часов − второй.

Пример 4. Из А в Б выехал товарный поезд, а навстречу ему одновременно из Б вышли пассажирский и скорый поезда. Товарный поезд, скорость которого меньше скоростей двух других поездов, встретил скорый поезд в 252 км от А, а пассажирский − в 308 км от А. В тот момент, когда скорый поезд прибыл в А, пассажирский находился в 198 км от А. Найти расстояние от А до Б.

Решение. Пусть x км/ч − скорость товарного поезда, y км/ч − скорость пассажирского поезда, z км/ч − скорость скорого поезда, причём $x < y$, $x < z$, $x, y, z \neq 0$, S км − расстояние между пунктами А и Б,

$\frac{252}{x}$ ч − время, которое прошёл до встречи товарный поезд,

$\frac{S-252}{z}$ ч − время, которое прошёл до встречи скорый поезд.

Получаем уравнение $\frac{252}{x} = \frac{S-252}{z}$. Аналогично получаем уравнения $\frac{S-308}{y} = \frac{308}{x}$ и $\frac{S}{z} = \frac{S-198}{y}$. Таким образом, имеем систему уравнений:

$\begin{cases} \frac{252}{x} = \frac{S-252}{z}, \\ \frac{S-308}{y} = \frac{308}{x}, \\ \frac{S}{z} = \frac{S-198}{y}, \end{cases}$ которая содержит три уравнения и четыре переменные.

Перемножим левые и правые части полученных уравнений $252\cdot(S-308)\cdot S = (S-252)\cdot 308\cdot(S-198)$, в результате преобразования данного уравнения получим квадратное уравнение относительно S:

$S^2 - 11\cdot 99\cdot S + 11\cdot 252\cdot 99 = 0$, $D = (11\cdot 99)^2 - 4\cdot 11\cdot 252\cdot 99 = (3\cdot 11\cdot 9)^2$, Д > 0, 2 корня,

$S_1 = \frac{11\cdot 99 + 3\cdot 99}{2} = \frac{14\cdot 99}{2} = 693$,

$S_2 = \frac{11\cdot 99 - 3\cdot 99}{2} = \frac{8\cdot 99}{2} = 396$.

К условию задачи подходит первое значение S = 693, так как расстояние между пунктами А и Б должно быть больше, чем 252 + 198 = 450 км.

Ответ: расстояние между пунктами 693 км.

Пример 5. При вращении двух колёс, соединённых бесконечным ремнём, меньшее из них делает в минуту на 400 оборотов больше второго. Большее колесо делает 5 оборотов в промежуток времени на 1 с больший, чем время, за которое делает 5 оборотов меньшее колесо. Сколько оборотов делает каждое колесо в минуту?

Решение. Пусть x − число оборотов, которые делает большее колесо в минуту, а y − число оборотов в минуту меньшего колеса, причём по смыслу задачи y > x. Тогда $\frac{5}{x}$ мин. − время, за которое большее колесо сделает 5 оборотов, а $\frac{5}{y}$ мин. − время, за которое меньшее колесо сделает 5 оборотов. По условию задачи y − x = 400, а $\frac{5}{x} - \frac{5}{y} = \frac{1}{60}$. Составим систему из двух уравнений с двумя неизвестными, решая которую, получим:

$$\begin{cases} y - x = 400, \\ \frac{5}{x} - \frac{5}{y} = \frac{1}{60}; \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 400, \\ 300(y-x) = xy; \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 400, \\ 300\cdot 400 = xy; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 400, \\ 120000 = x(x+400). \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$x^2 + 400x - 120000 = 0$, D = 160000+ 480000 = 640000, Д > 0, 2 корня,

$x_1 = -\ 600$, $x_2 = 200$.

Первое значение корня не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, большее колесо делает 200 оборотов в минуту, а меньшее у = 200 + 400 = 600 оборотов в минуту.

Ответ: 200 об/мин и 600 об/мин.

Задания для самостоятельного решения.

1. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов М и К, расстояние между которыми 25 км. Первый пешеход пришёл в К на 2 часа 15 минут раньше, чем в М. Найдите скорости пешеходов, если известно, что они встретились через 2,5 часа после выхода. ***Ответ:*** 4 км/час, 6 км/час

2. Лодка может проплыть 18 км по течению реки и ещё 2 км против течения за то же время, какое требуется плоту, чтобы проплыть 8 км по этой реке. Найдите скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки 8 км/час. ***Ответ:*** 4 км/ч.

3. Двое туристов идут навстречу друг другу из пунктов А и В. Первый вышел из А на 6 часов позже, чем второй из В и при встрече оказалось, что он прошёл на 12 км меньше второго. Продолжая движение с той же скоростью, первый пришёл в В через 8 часов, а второй в А через 9 часов после встречи. Найдите скорость каждого туриста. ***Ответ:***

4. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 18 км, одновременно выезжают два велосипедиста. Скорость одного из их на 5 км/час меньше скорости другого. Велосипедист, который первым прибыл в В, сразу же повернул обратно и встретил другого велосипедиста через 1 час 20 минут после выезда из А. На каком расстоянии встретились велосипедисты от пункта В? ***Ответ:*** $3\frac{1}{3}$ км от пункта В.

5. Группа туристов отправляется по течению реки на лодке от лагеря с намерением вернуться обратно через 5 часов. Скорость течения реки 2 км/час, собственная скорость лодки 8 км/час. На какое наибольшее расстояние по реке они могут отплыть, если перед возвращением они планируют пробыть на берегу 3 часа? ***Ответ:*** 7,5 км.

6. Два пешехода выходят навстречу друг другу из пунктов, расстояние между которыми 30 км. Если первый выйдет на 2 часа раньше второго, то он встретит второго пешехода через 4,5 часа после своего выхода. Если второй выйдет на 2 часа раньше первого, то он встретит первого пешехода через 5 часов после своего выхода. С какой скоростью идет каждый пешеход? ***Ответ:*** 3 км/час, 5 км/час.

7. Путь от посёлка до озера идёт сначала горизонтально, а затем в гору. Велосипедист, добираясь до озера и обратно на горизонтальном участке пути, ехал со скоростью 12 км/час. На подъёме – со скорость 8 км/час, а на спуске – 15 км/час. Путь от посёлка до озера занял у него 1 час, а обратный путь - 46 минут. Найдите расстояние от посёлка до озера. ***Ответ:*** 10 км.

8. На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходил круг на 2 минуты быстрее другого и через час обогнал его ровно на круг. За сколько минут

каждый лыжник проходил круг? ***Ответ:*** первый лыжник проходит круг за 10 минут, а второй за 12 минут.

Задания на работу

Содержание таких задач обычно сводится к следующему: некоторую работу, объём которой часто не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно (с постоянной для каждого производительностью).

Основными компонентами задач такого типа являются: объём работы, время работы, производительность труда (работа, выполненная в единицу времени). При решении используются следующие допущения:

- Неизвестный объём работы, которую необходимо выполнить, обычно принимают за 1.
- Если P − производительность, A − объём работы, t − время, требующееся для выполнения этой работы, то

$$P = \frac{A}{t}, \quad t = \frac{A}{P}, \quad A = P \cdot t.$$

- Если P_1 − производительность одного работающего, P_2 − производительность другого, то время их совместной работы равно $\frac{A}{P_1 + P_2}$, где A − объём выполняемой ими работы.

Пример 1. Первому трактору на вспашку всего поля требуется на 2 ч меньше, чем третьему, и на 1 ч больше, чем второму. При совместной работе первого и второго тракторов поле может быть вспахано за 1 ч 12 мин. Какое время на вспашку поля будет затрачено при совместной работе всех трёх тракторов?

Решение. Примем величину работы (в данном случае это вспашка всего поля) за единицу. Пусть x ч — время, необходимое для вспашки поля первому трактору, y ч — второму и z ч — третьему трактору. Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность первого трактора, $\frac{1}{y}$ – второго и $\frac{1}{z}$ – третьего. По условию задачи z – x = 2 и x – y = 1. Далее, так как при совместной работе первого и второго тракторов выполняется $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ часть работы в час, а вся работа выполняется ими за 1 ч 12 мин, т. е. за $\frac{6}{5}$ ч, то $\frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$=1.

В итоге приходим к следующей системе уравнений: $\begin{cases} z - x = 2, \\ x - y = 1, \\ \frac{6}{5x} + \frac{6}{5y} = 1. \end{cases}$

Решив эту систему, получим (3; 2; 5), (–0,4; – 0,6; 2,4). По смыслу задачи

$x > 1$, $y > 0$ и $z > 2$. Из найденных решений этим условиям удовлетворяет только первое решение.

Теперь ответим на вопрос задачи. При совместной работе трёх тракторов производительность труда составит $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$, т.е. $\frac{31}{30}$. Значит, время на вспашку поля тремя тракторами составляет $\frac{31}{30}$ ч.

Ответ: $\frac{31}{30}$ ч.

Пример 2. Имеющиеся в совхозе комбайны, работая вместе, могут убрать урожай за одни сутки. Однако по плану комбайны вступали в работу последовательно: в первый час работал лишь один комбайн, во второй — два, в третий — три и т. д. до тех пор, пока не начали работать все комбайны, действовавшие вместе до полной уборки урожая. Время работы, предусмотренное планом, уменьшилось бы на 6 ч, если бы с самого начала уборки постоянно работали все комбайны, за исключением пяти. Сколько комбайнов было в совхозе?

Решение. Примем величину всей работы равной 1 и введем три переменные: n — число комбайнов в совхозе, x — производительность труда каждого комбайна за 1 ч, t ч — время совместной работы всех комбайнов по плану. По условию n комбайнов, производительность каждого из которых x, могут выполнить работу за 24 ч, т. е. $24nx = 1$. По плану в первый час действовал один комбайн, объём работы, выполненной им за этот час, равен x. Во второй час действовали два комбайна, объём работы, выполненной ими за этот час, равен $2x$. В третий час три комбайна выполнили объём работы, равный $3x$, и т. д., в $(n - 1)$-й час $(n - 1)$ комбайн выполнил объём работы, равный $(n - 1)x$. После этого в течение t ч действовали все n комбайнов, объём выполненной ими работы равен ntx. Плановая работа комбайнов в итоге описывается следующим уравнением:

$$x+2x+\ldots+(n-1)x+ntx=1. \qquad (1)$$

Заметим, что $x+2x+\ldots+(n-1)x$ есть сумма $(n-1)$ членов арифметической прогрессии (a_n), у которой $a_1=x$, $d=x$. Значит,

$x+2x+\ldots+(n-1)x = \frac{x+(n-1)x}{2}(n-1)=\frac{n(n-1)x}{2}$ и уравнение (1) принимает вид:

$$nx\left(\frac{n-1}{2}+t\right)=1.$$

Наконец, из условия следует, что если бы с самого начала работали $(n-5)$ комбайнов, то работа длилась бы не $(n-1+t)$ ч, что было предусмотрено планом, а на 6 ч меньше, т. е. $((n-1+t)-6)$ ч, тогда $(n+t-7)(n-5)x = 1$.

В итоге получаем следующую систему уравнений относительно переменных n, x, t:

$$\begin{cases} 24nx = 1, \\ nx\left(\frac{n-1}{2}+t\right)=1, \\ (n+t-7)(nx-5x)=1. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $nx=\frac{1}{24}$. Подставив это выражение во второе и третье уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} nx = \frac{1}{24}, \\ \frac{n-1}{2} + t = 24, \\ (n+t-7)(\frac{1}{24} - 5x) = 1. \end{cases}$$

Далее система без труда решается методом подстановки. Из первого уравнения $x = \frac{1}{24n}$, из второго t = $\frac{49-n}{2}$. Подставив эти значения x и t в третье уравнение, получим:

$\frac{(n+35)(n-5)}{48n} = 1$, откуда находим, что $n_1 = 25$, $n_2 = -7$.

По смыслу задачи $n > 1$. Этому условию удовлетворяют только $n_1 = 25$. Значит, в совхозе было 25 комбайнов.

Ответ: 25 комбайнов.

Задания для самостоятельного решения

1. Токарь должен был изготовить в день 24 детали, чтобы выполнить задание в срок. Однако он изготовлял в день на 15 деталей больше и уже за 6 дней до срока изготовил 21 деталь сверх плана. Сколько деталей изготовил токарь? ***Ответ:*** 429 деталей.

2. Бригада рабочих должна была изготовить определенное количество деталей за 20 дней. Однако она изготавливала в день на 70 деталей больше, чем планировалось первоначально. Поэтому уже за 7 дней до срока ей осталось изготовить 140 деталей. Сколько деталей должна была изготовить бригада? ***Ответ:*** 3000 деталей.

3. Два печника могут сложить печь за 12 часов. Если первый печник будет работать 2 часа, а второй 3 часа, то они выполнят 20% всей работы. За сколько часов может сложить печь каждый печник, работая отдельно? ***Ответ:*** один за 20 часов, другой за 30 часов.

4. Один завод может выполнить некоторый заказ на 4 дня быстрее, чем другой. За какое время может выполнить этот заказ каждый завод, если известно, что при совместной работе за 24 дня они выполнили заказ в 5 раз больший? ***Ответ:*** за 8 дней, за 12 дней.

5. Две трубы при совместном действии могут наполнить бассейн за 4 часа. Если бы сначала первая труба наполнила половину бассейна, а затем её перекрыли и открыли вторую, то наполнение бассейна было бы закончено за 9 часов. За сколько часов может наполнить этот бассейн каждая труба в отдельности? ***Ответ:*** одна из труб может наполнить бассейн за 12 часов, а вторая − за 6 часов.

6. Две копировальные машины, работая одновременно, могут сделать копию пакета документов за 10 минут. За какое время каждая машина в отдельности может выполнить эту работу, если известно, что первая может

справиться с этой работой на 15 минут быстрее второй? ***Ответ:*** первая машина за 15 минут, вторая за 30 минут.

7. Два каменщика, второй из которых начинает работать на 3 дня позже первого, могут выстроить стену за 14 дней. Известно, что первому каменщику потребовалось бы на выполнение этой работы на 6 дней больше, чем второму. За сколько дней может выстроить эту стену каждый каменщик в отдельности? ***Ответ:*** первый каменщик может построить стену за 28 дней, второй – за 22 дня.

8. Три землекопа, работая одновременно, за 4 дня выкопали 216 м траншеи. За один день третий землекоп выкапывает больше второго на столько же метров, на сколько метров второй выкапывает за день больше первого. За 5 дней третий землекоп выкапывает столько же метров, сколько первый за 7 дней. Сколько метров в день выкапывает первый землекоп? ***Ответ:***

Задачи на смеси

Для решения задач на смеси необходимо знать такие понятия как «концентрация», «процентное содержание», «проба», «влажность» и т.д.

Если смесь (сплав, раствор) массы m состоит из веществ A, B, C, массы которых m_1, m_2, m_3 соответственно, то величина $\frac{m_1}{m}$ называется ***концентрацией*** вещества A в смеси, $\frac{m_2}{m}$ − концентрацией вещества B, а $\frac{m_3}{m}$ − концентрацией вещества C в смеси. ***Концентрация*** − это количество вещества в единице общей массы. Величина $\frac{m_1}{m} \cdot 100\%$ называется ***процентным содержанием*** вещества A в смеси, $\frac{m_2}{m} \cdot 100\%$ и $\frac{m_3}{m} \cdot 100\%$ − процентным содержанием веществ B и C соответственно. Ясно, что $\frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} + \frac{m_3}{m} = 1$, т. е. от концентрации двух веществ зависит концентрация третьего.

Если k $(0 < k < 1)$ − ***концентрация вещества A*** в смеси, масса которой равна m, то ***масса вещества A*** в этой смеси равна km.

При решении задач на смеси обычно прослеживают содержание какого-либо одного вещества из тех, которые смешиваются.

Решение этих задач связано с понятиями «концентрация», «процентное содержание», «проба», «влажность» и т. д. и основано на следующих допущениях:

1. Все рассматриваемые смеси (сплавы, растворы) однородны.

2. Не делается различия между литром как единицей емкости и литром как единицей массы.

При составлении уравнения обычно прослеживают содержание
какого-нибудь одного вещества из тех, которые сплавляются (смешиваются и т. д.).

Пример 1. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

Решение. Сплав состоит из меди и олова. Проследим за содержанием одного из этих веществ, например, олова в первоначальном сплаве и в полученном.

В 12 кг сплава было 45% меди, а олова в нём было 55%, т. е. $12\cdot\frac{55}{100}$ кг олова. Пусть к первоначальному сплаву добавили x кг олова. Тогда получилось (12 + x) кг нового сплава, в котором олова стало 60%, т. е. $\frac{60(12+x)}{100}$ кг.

Таким образом, получается следующее уравнение:

$$12\cdot\frac{55}{100} + x = \frac{60(12+x)}{100}.$$

Решив это уравнение, найдем, что x =1,5. По смыслу задачи x > 0. Найденное значение x этому условию удовлетворяет. Итак, к первоначальному сплаву следует добавить 1,5 кг олова.

Замечание. Наметим коротко составление уравнения, основанное на прослеживании за содержанием в первоначальном и полученном сплавах меди, а не олова. В первоначальном сплаве меди было $12\cdot\frac{45}{100}$ кг.

Добавили x кг олова (меди не добавляли). Тогда получилось (12+x) кг нового сплава, в котором меди 40%, т. е. $\frac{40(12+x)}{100}$ кг. Получаем уравнение

$$12\cdot\frac{45}{100} = \frac{40(12+x)}{100}.$$

Ответ: 1,5 кг.

Пример 2. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько стали одного и другого сорта следует взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?

Решение. Проследим за содержанием никеля в сплавах. Взяв для переплавки x т стали, содержащей 5% никеля, непосредственно никеля взяли при этом $x\cdot\frac{5}{100}$ т, а взяв для переплавки y т стали, содержащей 40% никеля, никеля взяли при этом $y\cdot\frac{40}{100}$ т.

Так как в полученных 140 т нового сплава никеля стало содержаться 30%, т.е. $140\cdot\frac{30}{100}$ т, то получаем следующее уравнение:

$x\cdot\frac{5}{100} + y\cdot\frac{40}{100} = 140\cdot\frac{30}{100}$. Кроме того, x + y =140. Таким образом, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 40y = 140\cdot 30, \\ x + y = 140. \end{cases}$$

Из этой системы находим x = 40, y = 100. По смыслу задачи 0 < x < 140,

$0 < y < 140$. Найденные значения x и y этим условиям удовлетворяют. Итак, стали с 5%-ным содержанием никеля следует взять 40 т, а стали с 40%-ным содержанием никеля следует взять 100т.

Ответ: 40 т и 100 т.

Пример 3. Из сосуда, содержащего 54 л чистой кислоты, вылили несколько литров и после этого долили сосуд водой до прежнего объёма. Затем из сосуда вылили смеси столько же литров, как и в первый раз. В результате в смеси, оставшейся в сосуде, осталось чистой кислоты 24 л. Сколько кислоты вылили в первый раз?

Решение. Пусть в первый раз было вылито *x л* кислоты. Тогда в сосуде осталось (54—*x)л* кислоты. Долив сосуд водой, получили 54 л смеси, содержащей (54—*x) л* кислоты. Значит, в 1 л смеси содержится $\frac{54-x}{54}$ *л* кислоты.

Во второй раз из сосуда вылили *x* л смеси, т. е. кислоты вылили $\frac{54-x}{54}\cdot x$ *л.*

Итак, в первый раз было вылито *x л* кислоты, во второй $\frac{54-x}{54}\cdot x$ *л* кислоты, а всего за два раза вылили 54 − 24 = 30 (л) кислоты. Таким образом, получаем следующее уравнение:

$x + \frac{54-x}{54}\cdot x = 30$, решив это уравнение, находим два корня $x_1 = 90$, $x_2 = 18$.

По смыслу задачи $0 < x < 54$. Из найденных значений x этому условию удовлетворяет только $x = 18$. Следовательно, в первый раз вылили 18 л кислоты.

Ответ: 18 л.

Пример 4. Сосуд ёмкостью 8 л заполнен смесью кислорода и азота, причём на долю кислорода приходится 16% ёмкости сосуда. Из этого сосуда выпускают некоторое количество смеси, дополняют сосуд до прежнего объёма азотом и вновь выпускают такое же количество смеси, после чего опять дополняют сосуд азотом до 8 л. В результате в сосуде стало 9% кислорода. Сколько литров смеси выпускали из сосуда каждый раз?

Решение. Пусть из сосуда выпускали каждый раз *x л* смеси и впускали в него *x л* азота. Тогда после первого выпускания в сосуде осталось *(8–x) л* смеси, а кислорода в этой смеси осталось (8–x)·0,16 л.

Подсчитаем теперь, сколько кислорода осталось после второго выпускания смеси.

Так как после впускания в сосуд *x л* азота оставшийся в нем кислород стал содержаться в 8 л смеси, то в 1 л смеси оказалось $\frac{(8-x)0{,}16}{8}$ *л* кислорода.

После того как произвели второе выпускание смеси, её в сосуде осталось снова

(8–*x*) л, но в ней всего $\frac{(8-x)0{,}16}{8}\cdot(8-x)$ л кислорода.

Итак, мы подсчитали, что в смеси осталось $\frac{(8-x)^2\,0{,}16}{8}$ *л* кислорода.

Это по условию задачи составляет 9% от 8 л, т. е. 8·0,09 л. Таким образом, мы приходим к следующему уравнению:

$\frac{(8-x)^2 0{,}16}{8}=8\cdot 0{,}09.$

Из этого уравнения находим $x_1=14$ и $x_2=2$. По смыслу задачи $0 < x < 8$. Из найденных решений этому условию удовлетворяет только *x=2.* Значит, выпускали каждый раз по 2 л смеси.

Ответ: 2 л.

Пример 5. Имеется два сплава с различным процентным содержанием меди. Масса первого сплава *a* кг, а второго *b* кг. От каждого из сплавов отделили по куску равной массы и каждую из отделённых частей сплавили с остатком другого куска. В новых сплавах процентное содержание меди стало одинаковым. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

Решение. Пусть *x* кг — масса каждого из отрезанных кусков, *y%* — процентное содержание меди в первом сплаве, z% — процентное содержание меди во втором сплаве.

После перестановки частей массы *x* кг в полученном первом сплаве (рис. 1) меди будет $\frac{a-x}{100}y+\frac{x}{100}z$, а процентное содержание меди будет равно $\frac{\frac{a-x}{100}y+\frac{x}{100}z}{a}\cdot 100\%$, т.е. равно $\frac{(a-x)y+xz}{a}$.

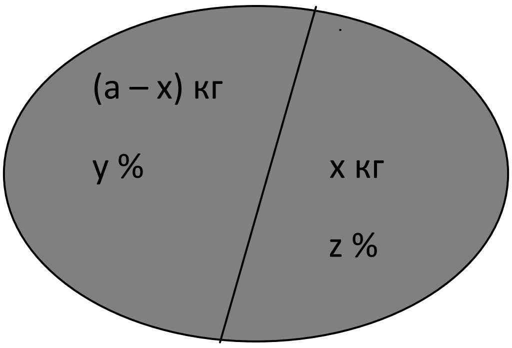


Рис. 1

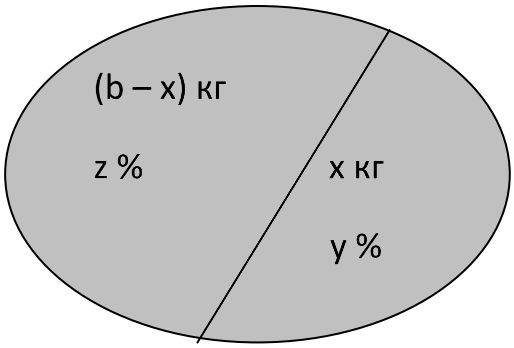


Рис. 2

В полученном втором сплаве (рис. 2) меди будет $\frac{b-x}{100}z+\frac{x}{100}y$, а процентное содержание меди будет равно $\frac{\frac{b-x}{100}z+\frac{x}{100}y}{b}\cdot 100\%$, т.е. равно $\frac{(b-x)z+xy}{b}$.

По условию в полученных сплавах процентное содержание меди одинаково. Значит, мы приходим к уравнению

$$\frac{(a-x)y+xz}{a}=\frac{(b-x)z+xy}{b}. \qquad (1)$$

Последовательно имеем:

aby – bxy + bzx = abz – axz + axy,

(aby – abz) – (bxy – bxz) – (axy – axz) = 0,

$ab(y - z) - bx(y - z) - ax(y - z) = 0,$
$(y - z)(ab - ax - bx) = 0.$

По условию $y \neq z$, значит, $ab - ax - bx = 0$, откуда находим $x = \frac{ab}{a+b}$. Переменные y и z исключились в процессе решения полученного уравнения.

По смыслу задачи $0 < x < a$ и $0 < x < b$. Убедимся, что найденное значение x этим условиям удовлетворяет. Действительно, так как $ab > 0$ и $a+b > 0$, то ясно, что $x = \frac{ab}{a+b} > 0$. Далее, так как $b < a+b$ и $a > 0$, то $ab < a(a+b)$, откуда ввиду того, что $a+b > 0$, получим $\frac{ab}{a+b} < a$, или $x < a$. Аналогично убеждаемся, что $x < b$.

Итак, масса каждого из отрезанных кусков равна $\frac{ab}{a+b}$ кг.

Ответ: $\frac{ab}{a+b}$ кг.

Пример 6. Имеется три слитка различных сплавов золота с серебром. Известно, что количество золота в 2г сплава из третьего литка то же, что во взятых вместе 1г из первого и 1г из второго слитков. Масса третьего слитка равна суммарной массе части первого слитка, содержащей 10 г золота, и части второго слитка, содержащей 80 г золота. Третий слиток в 4 раза тяжелее первого и содержит 75 г золота. Сколько граммов золота содержится в первом слитке?

Решение. Введём 6 переменных: x,y, - масса слитков в граммах; u,v,w - количество золота в 1г каждого слитка. Из второго предложения следует уравнение: $2w = u + v$, из третьего предложения следует уравнение: $z = \frac{10}{u} + \frac{80}{v}$, чтобы получить 10 г золота, надо взять $\frac{10}{u}$ г первого слитка и т.д. Из четвёртого предложения следуют уравнения $z = 4x$ и $zw = 75$.

Получим систему:

$$\begin{cases} 2w = u + v, \\ z = \frac{10}{u} + \frac{80}{v}, \\ z = 4x, \\ 2w = 75, \end{cases}$$

из четырёх уравнений с 5 неизвестными.

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти количество граммов в первом слитке, т.е. xu. Исключим неизвестные, сохраняя x и u. Заменим z на 4x во втором и четвёртом уравнениях. Затем выразим из четвёртого w, подставим в первое и найдём из первого уравнения v. После упрощений придём к уравнению

$4(xu)^2 - 80xu + 375 = 0,$

$Д = 6400 - 4 \cdot 4 \cdot 375 = 6400 - 6000 = 400$, $Д > 0$, два корня

$xu = 12{,}5$ и $xu = 7{,}5$.

По условию первый слиток содержит более 10 г золота (его часть содержит 10г). Значит, первый слиток содержит 12,5 г золота.

Ответ: 12,5 г.

Пример 7. Проценты содержания (по весу) кислоты в трёх растворах таковы, что квадрат процента кислоты второго раствора равен произведению процентов первого и третьего растворов. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовых отношениях 2 : 3 : 4, то получится раствор, содержащий 32% кислоты, а если смешать их в весовых отношениях 3 : 2 : 1, то получится раствор, содержащий 22% кислоты. Сколько процентов кислоты содержит каждый раствор?

Решение. Пусть в первом растворе x% кислоты, во втором – y% и в третьем – z% кислоты. По первому условию задачи $y^2 = xz$.

В одном грамме первого раствора содержится $\frac{x}{100}$ г кислоты, в одном грамме второго раствора – $\frac{y}{100}$ г кислоты и в одном грамме третьего раствора – $\frac{z}{100}$ г кислоты. Если мы возьмём 2 г первого раствора, 3г – второго и 4г – третьего, то получим 9г смеси, содержащей $(2\cdot\frac{x}{100} + 3\cdot\frac{y}{100} + 4\cdot\frac{z}{100})$ г кислоты. По условию задачи полученная смесь содержит 32% кислоты, т.е. в 9г смеси содержится

$9\cdot\frac{32}{100}$ г кислоты. Из этого условия получаем уравнение:

$$2\cdot\frac{x}{100} + 3\cdot\frac{y}{100} + 4\cdot\frac{z}{100} = 9\cdot\frac{32}{100}.$$

Аналогично рассуждая, получим ещё одно уравнение

$$3\cdot\frac{x}{100} + 2\cdot\frac{y}{100} + 1\cdot\frac{z}{100} = 6\cdot\frac{22}{100}.$$

Получим систему трёх уравнений с тремя неизвестными. Перепишем её в виде

$$\begin{cases} y = xz, \\ 2x + 3y + 4z = 288, \\ 3x + 2y + z = 132, \end{cases} \qquad (1)$$

и решим её. Из третьего уравнения системы выразим z через x и y:

$$z = 132 - 3x - 2y, \qquad (2)$$

подставляя выражение 132 – 3x – 2y вместо z в первое и второе уравнения системы (1), получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} y^2 = x(132 - 3x - 2y), \\ 2x + 3y + 4(132 - 3x - 2y) = 288. \end{cases}$$

После переноса всех членов каждого уравнения в одну сторону и приведения подобных членов получим систему:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 2xy - 132 = 0, \\ 240 - 10x - 5y = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Из второго уравнения системы (3) выразим y через x: $y = 48 - 2x$ (4)

и подставим выражение 48–2x вместо y в первое уравнение системы (3). Получим уравнение с одним неизвестным x:

$$3x^2 + (48 - 2x)^2 + 2x(48 - 2x) - 132x = 0,$$

которое после приведения подобных членов можно записать в виде:

$3x^2 – 228x + 2304 = 0$,

разделив обе части уравнения на 3, получим квадратное уравнение:

$x^2 – 76x + 768 = 0.$ (5)

Дискриминант квадратного уравнения (5)

$D = b^2 – 4ac = (–76)^2 – 4·1·768 = 52 > 0$, значит, уравнение (5) имеет два корня:

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, т.е. $x_1 = 64$, $x_2 = 12$.

Подставляя x_1 и x_2 в выражение (4), находим $y_1= − 80$, $y_2 = 24$.

Подставляя пары $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ в выражение (2), получаем

$z_1 = 100$, $z_2 = 48$.

Система (1) имеет два решения:

$x_1 = 64$, $y_1= – 80$, $z_1 = 100$,

$x_2 = 12$, $y_2 = 24$, $z_2 = 48$,

но по предположению, y есть процент кислоты во втором растворе, и, значит, y не может быть отрицательным числом. Значит, условию задачи удовлетворяет лишь одно решение $x_2=12$, $y_2 = 24$, $z_2=48$. Таким образом, первый раствор содержал 12% кислоты, второй – 24%, третий – 48%.

Ответ: 12%, 24%, 48%.

Задания для самостоятельного решения

1. Сплав весит 2 кг и состоит из серебра и меди, причём масса серебра составляет $14\frac{2}{7}$ % массы меди. Сколько серебра в сплаве? ***Ответ:*** 0,25 кг серебра.

2. Два металла содержатся в каждом из двух взятых сплавов. В первом сплаве металлы находятся в отношении 1 : 2, а во втором − в отношении 3 : 2. В каком отношении нужно взять части этих сплавов, чтобы получился новый сплав с отношением металлов 8 : 7? ***Ответ:*** 1 : 3.

3. Имеются два раствора кислоты разной концентрации. Объём одного раствора 4 л, другого − 6 л. Если их слить вместе, то получится 35-% раствор кислоты. Если же слить вместе равные объёмы этих растворов, то получится 36-% раствор кислоты. Сколько литров кислоты содержится в каждом из первоначальных растворов? ***Ответ:*** 1,64 л и 1,86 л.

4. Имеются два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в 2,5 раза больше, чем во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплаве равных по массе частей первого и второго слитков получится слиток, в котором содержится 35% золота?

Ответ: в 2 раза.

5. Сплав меди с серебром содержит меди на 2 кг больше, чем серебра. Если к сплаву добавить $\frac{9}{16}$ того количества серебра, которое в нём содержится, то процентное содержание серебра в новом сплаве буде равно процентному

содержанию меди в первоначальном сплаве. Найдите массу первоначального сплава. ***Ответ:*** 18 кг.

6. В сосуд с водой налили 6 л 64%-ного раствора спирта, а затем после полного перемешивания вылили 6 л получившегося раствора. Такую операцию повторили 3 раза. Сколько воды первоначально было в сосуде, если известно, что объём выражается целым числом литров, не превышающим 10 л, и что окончательная концентрация спирта в нём стала равной 56%? ***Ответ:*** 6 л.

7. Имеются два слитка состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый слиток содержит 40% олова, а второй − 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором слитках одинаково. Сплавив 150 кг первого слитка и 250 кг второго, получим сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве? ***Ответ:*** 170 кг.

8. Сплавляя два одинаковых по массе куска с разным содержанием хрома, получили сплав, в котором содержалось 12 кг хрома. Если бы масса первого куска была бы в два раза больше, то в сплаве содержалось бы 16 кг хрома. Известно, что содержание хрома в первом куске на 5% меньше, чем во втором. Найдите процентное содержание хрома в каждом куске чугуна. ***Ответ:*** 5% и 10%.

Задачи на вычисления площадей

При решении задач на вычисление площадей данных фигур необходимо следующие формулы:

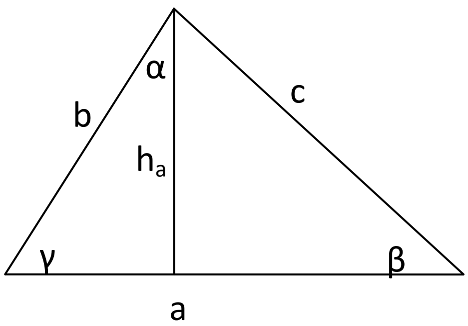


рис. 3

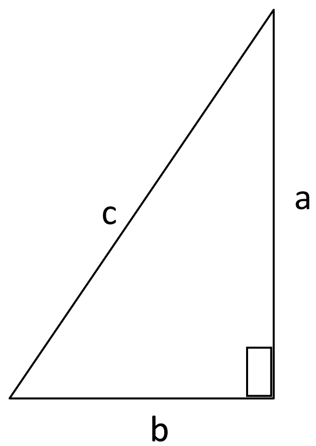


рис. 4

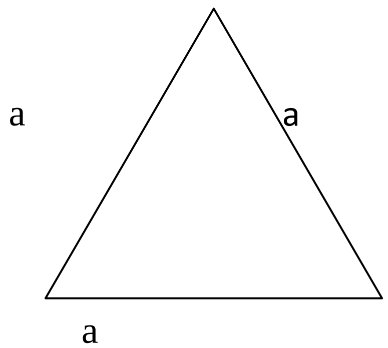


рис. 5

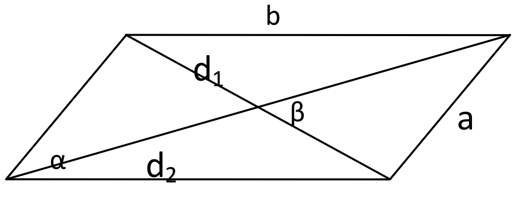


рис. 6

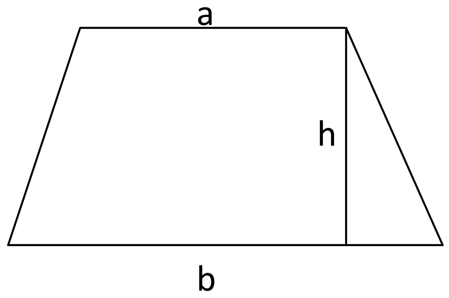


рис. 7

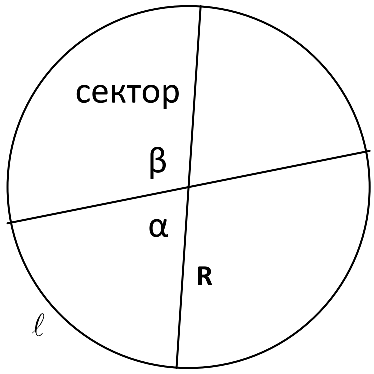


рис. 8

- ***Треугольник***

Полупериметр $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Радиус вписанной окружности r.

Радиус описанной окружности R.

$S = \dfrac{1}{2}ha = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{abc}{4R} = p\cdot r$.

Теорема синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R.$

Теорема косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

- ***Прямоугольный треугольник*** (рис. 4)

Теорема Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$; $r = \dfrac{a+b-c}{2}$; $R = \dfrac{c}{2}$.

- ***Равносторонний треугольник*** (рис. 5)

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

- ***Параллелограмм*** (рис.6)

$S = ab\sin\alpha = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\beta$;

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

- ***Трапеция*** (рис. 7)

$S = \dfrac{a+b}{2}\cdot h.$

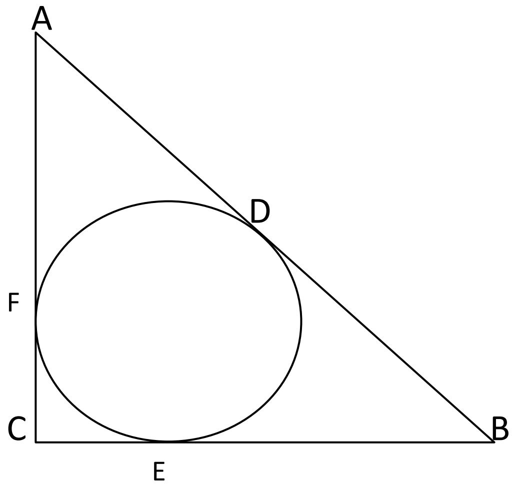
- ***Окружность, круг*** (рис. 8)

$L = 2\pi R$; $S = \pi R^2$.

- ***Длина дуги окружности*** $l = R\cdot\alpha$.

- ***Площадь сектора*** S = $\frac{\beta}{2}R^2$; S = $\frac{\beta^\circ}{360^\circ}\pi R^2$.

Пример 1. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 см и 12 см. Найти площадь треугольника.



Решение.

рис. 9

В Δ ABC угол C прямой, AD = 5 см, DB = 12 см, E и F − точки касания вписанной окружности и соответствующих катетов.

AD = AF, BD = BE, FC = EC по свойству касательных к окружности, проведённых из одной точки. Пусть EC = x, тогда по теореме Пифагора для Δ ABC можно записать $(5 + x)^2 + (12 + x)^2 = (5 + 12)^2$, $x_1 = 3$; $x_2 = -20$ (не подходит). Итак, AC = 5 + 3 = 8 см, BC = 12 + 3 = 15см. По формуле площади прямоугольного треугольника S = $\frac{1}{2}$AC· BC, S =$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 15 = 60$ см^2.

Ответ: 60 см^2.

Пример 2. Найти длину основания равнобедренного треугольника, площадь которого равна 25 см^2, а углы α при основании таковы, что tq α = 4**.**

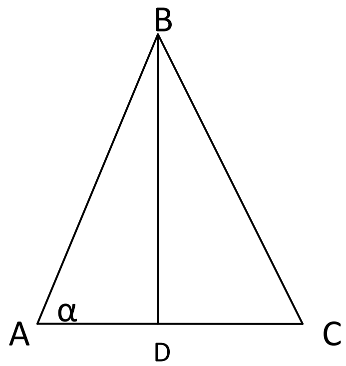


рис. 10

Решение.

В треугольнике ABC BD $\perp$ AC, AB = BC. По свойству равнобедренного треугольника AD=DC. Обозначим BD = h, AD = a, тогда tq α = $\frac{h}{a}$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}h \cdot 2a = ah.$

Получили систему уравнений $\begin{cases} \frac{h}{a} = 4, \\ ah = 25, \end{cases}$

h = 4a, $4a^2 = 25$, a = 2,5 или a = − 2,5 (не подходит по условию задачи). Отсюда в треугольнике ABC основание AC = 2a = 5.

Ответ: 5 см.

Пример 3. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение.

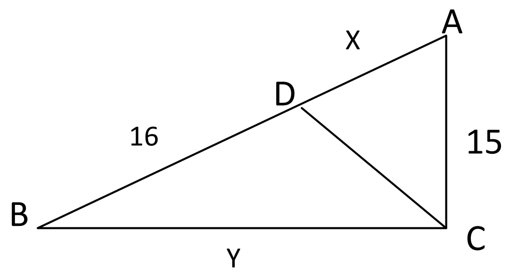


рис. 11

Воспользуемся формулой $r = \frac{S}{p}$. Для этого вычислим все стороны треугольника. На рисунке 11 $BC \perp AC$, AC = 15, $CD \perp AB$, BD = 16.

Обозначим AD = x, BC = y. Для Δ ABC по теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, или $15^2 + y^2 = (x + 16)^2$. Для Δ ADC по теореме Пифагора $AD^2 + DC^2 = AC^2$, или $DC^2 = AC^2 - AD^2$. Для Δ BDC по теореме Пифагора $BD^2 + DC^2 = BC^2$, или $DC^2 = BC^2 - BD^2$. Следовательно, $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$, $15^2 - x^2 = y^2 - 16^2$. Получим систему уравнений $\begin{cases} 225 + y^2 = x^2 + 32x + 256, \\ 225 - x^2 = y^2 - 256. \end{cases}$

Складывая уравнения, получаем, что $450 + y^2 - x^2 = x^2 + y^2 + 32x$, $2x^2 + 32x - 450 = 0$, $x_1 = 9$; $x_2 = -25$ (не подходит по условию задачи); y =20.

Итак, AC =15, BC = 20, AB = 25, тогда $r = \frac{AC + BC - AB}{2}$, $r = \frac{15 + 20 - 25}{2} = 5.$

Ответ: 5 см.

Задания для самостоятельного решения.

1.Диагональ прямоугольника равна 15 см. Если одну из его сторон уменьшить на 6 см, а другую уменьшить на 8 см, то периметр уменьшится в 3 раза. Найдите стороны прямоугольника. ***Ответ:*** 9 см и 12 см.

2. Длина садового участка на 10 м больше его ширины. Его площадь решили увеличить на 400 $м^2$. Для этого его длину увеличили на 10 м, а ширину − на 2 м. Найдите площадь нового участка. ***Ответ:*** 1600 $м^2$.

3. Периметр прямоугольника равен 34 см., а его диагональ равна 13 см. Найдите стороны прямоугольника. ***Ответ:*** 5см, 12 см.

4. Лист жести имеет форму прямоугольника, длина которого на 10 см больше ширины. По углам этого листа вырезали квадраты со стороной 5 см и сделали коробку, объём которой 1000 см^3. Найдите размеры листа жести. ***Ответ:*** 20 см, 30 см.

5. Вокруг прямоугольной площадки, стороны которой 4 м и 5 м надо сделать дорожку одинаковой ширины так, чтобы площадь площадки вместе с дорожкой была равна 56 м^2. Какой ширины должна быть дорожка? ***Ответ:*** 1,5 м.

6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а его катеты отличаются друг от друга на 2 см. Найдите катеты треугольника. ***Ответ:*** 6 см и 8 см.

2.4 Методические особенности обучения решению текстовых задач по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия»

В условии текстовой задачи на прогрессии либо непосредственно указывается, что неизвестные образуют прогрессию, либо из содержания этой задачи следует, что производится какое-то действие (работа, движение и т.д.), характер которого меняется с определенной закономерностью, обнаруживающей признаки арифметической или геометрической прогрессии.

В решении текстовых задач на прогрессии используются определения и свойства прогрессий.

***Арифметическая прогрессия* —** последовательность $a_1, a_2, \dots, a_к$, разность между двумя последовательными членами которой есть величина постоянная.

По определению, $a_{n+1} - a_n = d$ или $a_{n+1} = a_n + d$ для всех $n = 1, 2, \dots, k-1$. Величина d называется ***разностью*** прогрессии. Арифметическая прогрессия является ***возрастающей***, если $d > 0$, и ***убывающей***, если $d < 0$.

Основные формулы:

$a_n = a_1 + d(n-1)$, $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, где S_n − сумма n первых членов прогрессии.

Для конечной арифметической прогрессии суммы членов, равноотстоящих от концов прогрессии, равны.

Признак арифметической прогрессии:

Последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов, т.е.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n = 2, 3, k-1.$$

Рассмотрим более ***общее свойство:*** каждый член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому двух равноудалённых от него членов, т.е.

$$a_n = \frac{a_{n+m} + a_{n-m}}{2}, \text{ где } n, m - \text{любые натуральные числа, } n > m.$$

Геометрическая прогрессия — последовательность b_1, b_2, … , b_k, отношение двух последовательных членов которой есть величина постоянная.

По определению, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ или $b_{n+1} = b_n \cdot q$ для всех $n = 1, 2, \ldots, k-1$, $q \neq 0$.

Величина q называется ***знаменателем*** прогрессии. При $|q|>1$, $b_1 > 0$ прогрессия называется возрастающей, а при $0 < |q| < 1$, $b_1 > 0$ — убывающей.

Основные формулы:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$, $S_n = b_1 \cdot n$, $q = 1$, где S_n − сумма n первых членов прогрессии.

Геометрическая прогрессия называется ***бесконечно убывающей***, если она содержит бесконечное число членов и $|q| < 1$. В этом случае сумма её членов определяется по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Признак геометрической прогрессии:

Последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов, т.е.

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1},\ n = 2, 3, \ldots$$

Рассмотрим более ***общее свойство:*** квадрат каждого члена геометрической прогрессии равен произведению двух равноудалённых от него членов, т.е.

$$b_n^2 = b_{n-m} \cdot b_{n+m},\ \text{где } n, m - \text{любые натуральные числа, } n > m.$$

Рассмотрим несколько задач, связанных с прогрессиями.

Пример 1. За изготовление и установку самого нижнего железобетонного кольца колодца заплатили 26 рублей, а за каждое следующее кольцо платили на 2 рубля меньше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплачено ещё 40 рублей. Средняя стоимость изготовления и установки одного кольца оказалась равной $22\frac{4}{9}$ рубля. Сколько колец установлено?

Решение. Пусть было установлено n колец, тогда по условию задачи, $S = \frac{26 \cdot 2 - (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n$ рублей — стоимость n колец, $22\frac{4}{9} \cdot n$ рублей — стоимость всей работы. Составим и решим уравнение

$$\frac{26 \cdot 2 - (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n + 40 = 22\frac{4}{9} \cdot n,$$

$$(52 - 2n + 2)n + 80 = 44\frac{8}{9}n,$$

$$54n - 2n^2 + 80 = 44\frac{8}{9}n,$$

$$-2n^2 + \frac{82}{9}n + 80 = 0,$$

$$n^2 - \frac{41}{9}n - 40 = 0,$$

$9n^2 - 41n - 360 = 0$, $\quad D = (-41)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-360) = 1681 + 12960 = 14641$, $D > 0$, 2 корня.

$n_1 = \frac{41-121}{18} = -\frac{80}{18} = -5$ не подходит по смыслу задачи, т.к. n > 0.

$n_2 = \frac{41+121}{18} = \frac{162}{18} = 9.$

Ответ: 9 колец.

Пример 2. Найдем трёхзначное число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию и которое делится на 45.

Решение. Пусть x — цифра сотен, y — цифра десятков и z — цифра единиц искомого числа. Так как числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $y = \frac{x+z}{2}$. Так как искомое число делится на 45, то оно делится на 5 и на 9. Значит, оно оканчивается либо цифрой 0, либо цифрой 5 и сумма его цифр делится на 9. Итак, возникают две возможности, и в соответствии с этим мы приходим к совокупности двух систем уравнений (отличающихся только первым уравнением):

$$\begin{cases} z = 0, \\ y = \dfrac{x+z}{2}, \\ x + y + z = 9k; \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 5, \\ y = \dfrac{x+z}{2}, \\ x + y + z = 9k, k \in N \end{cases}$$

Из первой системы находим $\begin{cases} x = 2y, \\ x + y = 9k. \end{cases}$ Перебрав целые значения y от 1 до 9, убеждаемся, что этой системе уравнений удовлетворяют лишь пары (6; 3), (12; 6), (18; 9). Однако по смыслу задачи x и y — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $1 \le x \le 9$ и $0 \le y \le 9$. Этим условиям удовлетворяет только пара (6; 3).

Из второй системы находим

$$\begin{cases} 2y = x + 5, \\ x + y + 5 = 9k. \end{cases}$$

Аналогично, перебрав целые значения y от 1 до 9, убеждаемся, что второй системе уравнений удовлетворяют пары (1; 3) и (7; 6). Итак, условиям задачи удовлетворяют три числа: 630, 135, 765.

Ответ: 135, 630, 765.

Пример 3. Найдём пятый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если известно, что её сумма равна 9, а сумма квадратов её членов равна 40,5.

Решение. Пусть последовательность b_1, b_2, b_3, …, b_n, ...— бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Тогда $\frac{b_1}{1-q} = 9.$

Рассмотрим последовательность b_1^2 , b_2^2 , b_3^2 ,…, b_n^2 .. . Члены этой последовательности также образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Первый член этой прогрессии равен b_1^2, а её знаменатель равен q^2. Тогда $\frac{b_1^2}{1-q^2}=40{,}5.$ Таким образом, мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q}=9, \\ \frac{b_1^2}{1-q^2}=40{,}5. \end{cases}$$

Решив её, получим $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. тогда $b_5 = b_1q^4 = \frac{2}{27}$.

Ответ: $\frac{2}{27}$.

Пример 4. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего числа отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то снова получим геометрическую прогрессию. Найдём эти числа.

Решение. Пусть x, y, z — искомые числа. Так как они являются последовательными членами геометрической прогрессии, то, воспользовавшись характеристическим свойством геометрической прогрессии, получим $y^2=xz$. Так как, далее, числа x. y, $(z–4)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то, воспользовавшись характеристическим свойством арифметической прогрессии, получим $y=\frac{x+(z-4)}{2}$.Так как, наконец, числа x, $(y–1)$, $(z–5)$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, то $(y–1)^2=x(z–5)$.

Таким образом, мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ x+z-4=2y, \\ (y-1)^2 = x(z-5). \end{cases}$$

Она имеет два решения: (1; 3; 9) и ($\frac{1}{9};\frac{7}{9};\frac{49}{9}$). Эти значения x, y, z удовлетворяют условию задачи. Таким образом, искомые числа: 1, 3 и 9 или $\frac{1}{9},\frac{7}{9}$ и $\frac{49}{9}$.

Ответ: 1, 3 и 9 или $\frac{1}{9},\frac{7}{9}$ и $\frac{49}{9}$.

Задания для самостоятельного решения.

1. Три числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если второе из них уменьшить на 2, остальные два оставить без изменения, то полученные числа будут составлять геометрическую прогрессию со знаменателем 3. Найдите эти числа. ***Ответ:*** 1; 5; 9.

2. Вычислите сумму бесконечной геометрической прогрессии 24; $в_2$; $2\frac{2}{3}$ …, если известно, что $в_2 < 2\frac{2}{3}$. ***Ответ:*** 18.

3. При каком значении х последовательность чисел 3х, 7 − х, 5х+7 является геометрической прогрессией? ***Ответ:*** − 3,5; − 1.

4. Геометрическая прогрессия состоит из 15 членов. Сумма первых пяти членов равна $\frac{11}{64}$, а сумма следующих пяти членов равна $-5\frac{1}{2}$. Найдите сумму последних пяти членов этой прогрессии. ***Ответ:*** 176.

5. Второй член геометрической прогрессии равен 3. Сумма четвёртого и третьего её членов равна 36. Найдите первый и третий члены прогрессии, если известно, что их произведение положительно. ***Ответ:*** $-\frac{3}{4}$ и − 12; 1 и 9.

6. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма четвёртого и шестого равна 80. Найдите первый член прогрессии. ***Ответ:*** 2.

7.Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 20, а сумма первых трёх её членов равна 26. Найдите прогрессию.

Ответ: 2; 6; 18; …

8. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего равно 128, сумма всех членов равна 126. Сколько членов в прогрессии? ***Ответ:*** 6.

9. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3,5, а сумма квадратов этой же прогрессии равна $\frac{147}{16}$. Найдите сумму кубов этой прогрессии. ***Ответ:*** $\frac{1029}{38}$.

10. Три различных целых числа составляют геометрическую прогрессию. Их сумма равна – 3. Найдите эти числа. ***Ответ:*** − 1; 2; − 4.

11. В окружность, радиус которой равен R, вписан квадрат; в это квадрат вписана окружность; в окружность снова вписан квадрат и т.д. Найдите сумму:

а) длин окружностей; б) площадей кругов; в) периметров квадратов; г) площадей квадратов. ***Ответ:*** а) $2\pi R(2+\sqrt{2})$; б) $2\pi R^2$;в) $8R(1+\sqrt{2})$; г) $4R^2$.

12. Три различных целых числа составляют арифметическую прогрессию, первый член которой 1. Если ко второму члену прибавить 3, а третий возвести в квадрат, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа. ***Ответ:*** 1; 4; 7 и 1; $-\frac{2}{3}$; $-2\frac{1}{3}$.

13. Найдите арифметическую прогрессию a_n, если:

а) $\begin{cases} a_1^2 + a_3^2 = 50, \\ a_2 + a_4 = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_2^2 + a_4^2 = 26, \\ a_3 + a_5 = 10. \end{cases}$

Ответ: а) − 1;3;7;11;… и 1;4;7;10; … б)1;3;5;7;… и − 1;2;5;8;…

14. Найдите:

а) наибольший член последовательности $a_n = 3 + 38n - n^2$;

б) наименьший член последовательности $a_n = n^2 - 42n - 2$.

Ответ: а) 364; б) – 443.

15. В арифметической прогрессии $a_n = 4n - 25$.

а) найдите сумму первых 10 членов;

б) при каком количестве членов прогрессии (начиная с первого) их сумма наименьшая? ***Ответ:*** а) – 30; б) 6.

16. Найдите x, при котором числа $x + 2$, $3x + 4$, $x^2 + 10$ составляют арифметическую прогрессию. ***Ответ:*** 1 и 4.

17. Сколько надо взять последовательных натуральных чисел, кратных 7, начиная с 7, чтобы их сумма была равна 252? ***Ответ:*** 8.

18. Найдите:

а) первый положительный член арифметической прогрессии $-10\frac{1}{2}$; $-10\frac{1}{4}$; …

б) первый отрицательный член арифметической прогрессии $8\frac{1}{2}$; $8\frac{1}{3}$; …

Ответ: а) 0,25; б) $-\frac{2}{3}$.

19. Сумма четырёх первых членов арифметической прогрессии равна 56, а сумма четырёх последних равна 112. Найдите прогрессию, если её первый член равен 11. ***Ответ:*** 11,13,15,…,29,31.

20. Найдите возрастающую арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трёх членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

Ответ: 5, 9, 13, … .

21. Какова сумма натуральных чисел:

а) меньших 100 и не кратных 3;

б) больших 50, но меньших 150 и не кратных 5?

Ответ: а) 2449; б) 8200.

2.5 Задания для самостоятельной работы

Варианты индивидуальных заданий

ВАРИАНТ 1

1. Цену на телефонный аппарат повышали дважды. После второго повышения аппарат стал стоить в 6 раз дороже, чем первоначально. На сколько процентов повысили цену во второй раз, если в первый раз цена была повышена на 50 %?
2. Фермер получил в банке кредит. Через год в счет погашения кредита вернул $\frac{3}{4}$ суммы, которую он был должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес сумму, на 21 % превышающую величину полученного кредита. Каковы годовые проценты по кредиту в данном банке?
3. Смешали 30-процентный раствор соляной кислоты с 10-процентным и получили 1200граммов 15-процентного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

4. Найти трехзначное число $\overline{abc}$, если известно, что оно является квадратом некоторого числа и справедливо равенство $\overline{abc} = \overline{ab} + 2\overline{bc} + 3\overline{ac}$.
5. Три маляра могут покрасить участок стены за 1,6 ч. За какое время мог бы выполнить эту работу третий маляр, если известно, что первый маляр покрасил бы этот участок за 8 часов, а второй – за 6 часов?
6. Производительности трех насосов относятся как 5:4:2. За 5 ч первый насос перекачал на 6 м3 больше, чем третий. Найти производительность второго насоса.
7. Из двух городов, расстояние между которыми 500 км, выехали одновременно два поезда и встретились через 4 ч. Если бы второй поезд выехал на 50 мин раньше первого, то они встретились бы через 3 ч 36 мин. Найдите скорость каждого поезда.
8. От пристани *A* к пристани *B* вниз по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки 2 км/ч. Последнюю $\frac{1}{10}$ часть пути лодка шла с выключенным двигателем. На остальной части ее скорость была на 8 км/ч больше скорости байдарки. К пристани *B* лодка и байдарка прибыли одновременно. Найдите собственную скорость байдарки.
9. На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходил круг на 2 мин быстрее другого и через час обогнал его ровно на круг. За сколько минут каждый лыжник проходит круг?
10. У Алены есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Алена садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алена говорила по телефону ровно половину времени поездки?

ВАРИАНТ 2

1. Рабочий день уменьшился с 8 до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5 %?
2. 31 декабря Петр взял в банке 8420 000 рублей в кредит под 10,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10,5 %), затем Петр переводит в банк *X*рублей. Какова должна быть сумма *X*, чтобы Петр выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?
3. Слиток сплава серебра с цинком весом в 3,5 кг содержал 76 % серебра. Его сплавили с другим слитком весом в 10,5 кг, содержание серебра в котором было 84 %. Сколько процентов серебра получилось в новом слитке?
4. Если задуманное двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4, а в остатке 3. Если же цифры в этом числе переставить, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Найти задуманное число.
5. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 5 часов после того, как один из них приступил к выполнению

заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ?

6. По плану кооператив должен засевать по 40 га в день. Однако кооператоры засевали каждый день на 30 % больше плана, а потому засеяли на 2 дня раньше срока, причем засеяли на 4 га больше, чем предусмотрено планом. Сколько га засеял кооператив?
7. Расстояние между двумя поселками, равное 24 км, первый пешеход преодолел на 2 ч быстрее второго. Если скорость движения первого увеличить на 2 км/ч, а второго – на 1 км/ч, то и в этом случае весь путь первый преодолеет на 2 ч быстрее второго. Найдите первоначальные скорости пешеходов.
8. Катер, скорость которого в стоячей воде 15 км/ч, отправился от речного причала вниз по течению реки и, пройдя 36 км, догнал плот, отправленный от того же причала за 10 ч до отправления катера. Найдите скорость течения реки.
9. Поезд проходит мост длиной 450 м за 45 с, а мимо будки стрелочника – за 15 с. Найти длину поезда и его скорость.
10. Два насоса, работая вместе, наполняют бассейн за 10 ч, причем первый из них наполняет бассейн на 15 ч быстрее второго. Первый насос включили в 6.00, второй – в 8.00, а в 12.00 в бассейне оказалось 400 м^3 воды. Какова емкость бассейна?

ВАРИАНТ 3

1. Цену на словарь повышали дважды. После второго повышения словарь стал стоить в два раза дороже, чем вначале. На сколько процентов повысили цену в первый раз, если во второй раз цена была повышена на 25 %?
2. В банк положен вклад из расчета 10 % годовых. Через два года была снята сумма, составляющая 21 % от суммы первоначального вклада. Через какое наименьшее число лет после этого сумма вклада окажется больше первоначальной в 1,4 раза?
3. Имеется сплав меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45 % меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому раствору, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?
4. Найдите целое число, которое обращается в квадрат как при увеличении его на 307, так и после уменьшения его на 192.
5. Три наноса, работая вместе, заполняют цистерну нефтью за пять часов. Производительности насосов относятся как 4 : 3 : 1. Сколько процентов объема цистерны будет заполнено за 8 часов совместной работы второго и третьего насосов?
6. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые 3 дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 м^3 сверх плана, поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была заготавливать бригада по плану?
7. Из двух городов, расстояние между которыми 700 км, одновременно навстречу друг другу отправляются два поезда и встречаются через 5 ч. Если

второй поезд отправится на 7 ч раньше первого, то они встретятся через 2 ч после отправления первого поезда. Найдите скорость каждого поезда.

8. Турист проплыл на лодке по реке из города A в город B и обратно за 7 ч. Найдите скорость течения реки, если известно, что турист проплывал 2 км против течения за то же время, что и 5 м по течению, а расстояние между городами равно 20 км.
9. На беговой дорожке катка происходит состязание двух конькобежцев в беге на 10 000 м. Когда победитель приходит к финишу, другому остается идти еще целый круг. Найдите длину беговой дорожки (круга), если победитель, проходя один круг в среднем на 1,8 с быстрее второго конькобежца, закончил дистанцию ровно в 18 мин.
10. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе могут вспахать за 6 дней, а первая и третья вместе – за 8 дней. Во сколько раз площадь, вспахиваемая за день второй бригадой, больше, чем площадь, вспахиваемая за день третьей бригадой?

ВАРИАНТ 4

1. Зарплату рабочему повысили сначала на 10 %, а через год еще на 20 %. На сколько процентов повысилась зарплата по сравнению с первоначальной?
2. Денежный вклад в банке за год увеличивается на 9 %. Вкладчик положил в банк 15000 руб. В конце года, после начисления процентов, он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год на тех же условиях, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 20000 руб. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы реализовать этот план? (ответ округлите до целых)
3. Руда содержит 40 % примесей. Сколько будет выплавлено металла с4-процентным содержанием примесей из 24 тонн руды?
4. Цифра десятков двузначного числа на 3 меньше цифры единиц, а произведение этого число на сумму его цифр равно 70.
5. Первый и второй насосы, работая вместе, наполняют бассейн за 6 часов. Второй и третий насосы, работая вместе, наполняют этот же бассейн за 12 часов, а первый и третий насосы – за 8 часов. За какое время наполнят бассейн три насоса, работая одновременно? Ответ дайте в минутах.
6. На посадке деревьев работали две бригады. Первая бригада ежедневно высаживала на 40 деревьев больше, чем вторая, и посадила 270 деревьев. Вторая бригада работала на 2 дня больше первой и посадила 250 деревьев. Сколько дней работала каждая бригада?
7. Из пункта A в одном и том же направлении вышли два лыжника, причем второй стартовал на 6 мин позже первого и догнал первого в 3 км от старта. Дойдя до отметки 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого в 4,6 км от старта. Найдите скорости лыжников.
8. Моторная лодка прошла 39 км по течению и 28 км против течения реки, затратив на весь путь 7 часов. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки 10 км/ч.

9. Найдите скорость и длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.
10. Имеются 2 слитка, представляющие собой сплавы цинка с медью. Масса первого слитка 2 кг, второго – 3 кг. Их сплавили вместе с 5 кг сплава цинка с медью, в котором цинка было 45 %, и получили сплав цинка с медью, в котором цинка стало 50 %. Если бы процентное содержание цинка в первом сплаве было таким, как процентное содержание цинка во втором, и наоборот, процентное содержание цинка во втором – таким, как оно было в первом, то сплавив эти два слитка с 5 кг сплава, в котором содержание цинка 60 %, мы бы получили сплав, в котором цинка содержится 55 %. Каково процентное содержание цинка в первом и во втором слитках?

ВАРИАНТ 5

1. Участок леса содержит 96 % сосен. Лесозаготовительная компания планирует вырубить на этом участке 150 сосен, в результате чего их содержание понизится до 95 %. Сколько сосен на участке?
2. Вкладчик поместил определенную сумму под проценты в банк. После первого начисления процентов он добавил к получившемуся вкладу сумму, равную половине исходной. После второго начисления процентов доход составил 76 %. Каков был процент в банке?
3. Латунь-сплав меди и цинка. Кусок латуни содержит цинка на 80 кг меньше, чем меди. Этот кусок латуни сплавили со 120 кг меди и получили латунь, в которой 75 % меди. Определить массу первоначального куска латуни.
4. Сумма цифр искомого двузначного числа равна 8. Если цифры этого числа переставить, то получится число, которое меньше искомого на 18. Найти исходное число.
5. Две снегоуборочные машины, работая вместе, могут очистить определенную площадь за 12 часов. Если бы сначала первая машина выполнила половину работы, а затем вторая машина закончила уборку снега, то на всю работу ушло бы 25 часов. За сколько часов могла бы очистить от снега эту площадь каждая машина, работая отдельно?
6. Трое рабочих должны сделать 80 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе делают за час 20 деталей. К работе приступил сначала первый рабочий. Он сделал 20 деталей, затратив более 3 часов. Оставшуюся часть работы выполняли вместе второй и третий рабочие. На всю работу было затрачено 8 часов. Сколько часов потребовалось бы первому рабочему на изготовление всех 80 деталей?
7. Две модели автомобиля выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, причем первая модель вышла из A на 15 с раньше. Пройдя расстояние AB, равное 60 м, каждая модель сразу повернула обратно и вернулась к месту старта. Найдите скорость каждой модели, если первая встреча между ними произошла через 21 с, а вторая – через 45 с после выхода первой модели.
8. Катер проходит расстояние 300 км между двумя пунктами на реке по течению за 10 часов, обратно за 12 часов. Найти скорость течения реки и катера в стоячей воде, считая скорости постоянными.

9. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше, чем второй. Если начнут они пробег с общего старта в одном направлении, то еще раз сойдутся через 720 с. Какую часть длины всей дорожки пробегает в секунду каждый бегун?
10. Имеется три сосуда. В первый сосуд налили 4 кг 70-процентного сахарного сиропа, а во второй – 6 кг 40-процентного сахарного сиропа. Если содержимое первого сосуда смешать с содержимым третьего сосуда, то получится сироп с 55-процентном содержанием сахара, а если содержимое второго сосуда смешать с содержимым третьего, то получится сироп с 35-процентном содержанием сахара. Найти массу сахарного сиропа в третьем сосуде?

ВАРИАНТ 6

1. Вкладчик в начале года часть имевшихся у него денег положил в один банк под 60 % годовых, а остальные деньги – в другой под40 % годовых. Через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую часть денег вкладчик положил в первый банк?
2. Предприятие располагает собственным капиталом в 100 млн руб. и берет в банке ссуду под 10 % годовых 50 млн руб. Норма прибыли предприятия составляет 30 % от суммы затрат. Сколько миллионов рублей составляет доход предприятия за год работы?
3. Имеются два слитка сплава серебра и олова. Первый слиток содержит 360 г серебра и 40 г олова, а второй слиток – 450 г серебра и 150 г олова. От каждого слитка взяли по куску, сплавили их и получили 200 г сплава, в котором оказался 81 % серебра. Определить массу куска, взятого от второго слитка.
4. Какое двузначное число на 19 больше суммы квадратов его цифр и на 44 больше удвоенного произведения его цифр?
5. Два крана, открытые одновременно, могут наполнить $\frac{5}{6}$ванны за 18 минут. За какое время наполнит ванну каждый из них, если один из них наполняет ванну на 18 минут быстрее другого?
6. Бригада по плану должна выпустить 360 деталей. Первые восемь дней она перевыполняла дневной план на 20 %. Оставшиеся дни она перевыполняла план на 25 %. В результате бригада сделала на 82 детали больше, чем требовалось по плану. Сколько дней работала бригада?
7. Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин. После чего, пройдя 60 км, наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.
8. Спортивная лодка прошла расстояние 45 км против течения реки и такое же расстояние по течению, затратив на весь путь 14 ч. Определите собственную скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч.
9. Самолет пролетел $\frac{1}{3}$ расстояния со скоростью 210 км/ч, оставшуюся часть расстояния со скоростью 480 км/ч. Найти среднюю скорость самолета.

10. За 6 ч рабочий делает на 64 детали больше, чем ученик, так как тратит на одну деталь на 2 мин меньше. Сколько деталей сделал ученик?

ВАРИАНТ 7

1. Количество продукции, произведенное за смену учеником, составило 80 % от нормы, а мастер произвел продукции на 20 % больше, чем ученик. Выполнил ли норму мастер?
2. Некоторая сумма, большая 1000 руб, была помещена в банк, и после первого периода хранения проценты, начисленные на вклад, составили 300 руб. Владелец вклада добавил на счет еще 700 руб. После второго периода хранения и начисления процентов сумма на вкладе стала равной 4400 руб. Сколько процентов начислялось по вкладу, если процентная ставка банка для первого и второго периодов хранения была одинаковой?
3. Собрали 8 кг свежих цветов ромашки, влажность которой 85 %. После того, как цветки высушили, их влажность составила 20 %. Чему равна масса цветов ромашки после сушки?
4. Сумма двух трехзначных чисел, записанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке, равна 1252. Найти эти числа, если сумма цифр равна 14, а сумма квадратов цифр равна 84.
5. Первый автопогрузчик работает вдвое быстрее второго, а вместе они загружают вагоны за 10 часов. Известно, что сначала работал только первый, а потом они работали вместе, в результате чего вся погрузка заняла 11 часов. Сколько часов работал только первый автопогрузчик?
6. Для вывоза со склада 80 т груза автокомбинату было заказано некоторое количество машин одинаковой грузоподъемности. Руководство комбината решило, что на каждую машину можно грузить на 1 т груза больше, чем планировали на складе, и прислали на 4 машины меньше, чем было заказано. Весь груз в итоге был вывезен. Сколько машин было заказано и сколько прислал автокомбинат?
7. Поезд должен пройти 54 км. Пройдя 14 км, он был задержан на 10 мин у семафора. Увеличив первоначальную скорость на 10 км/ч, он прибыл на место назначения с опозданием на 2 мин. Определите первоначальную скорость поезда.
8. За 7 ч катер прошел 60 км по течению реки и 64 км против течения. В другой раз катер за 7 ч прошел 80 км по течению реки и 48 км против течения. Определите собственную скорость катера и скорость течения реки.
9. По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать в 1 мин на два оборота больше. Сколько оборотов в минуту совершает каждая точка?
10. Сплав меди с серебром содержит серебра на 1845 г больше, чем меди. Если к нему добавить некоторое количество чистого серебра, по массе равное $\frac{1}{3}$ массы чистого серебра, первоначального содержащегося в сплаве, то получился бы новый сплав, содержащий 83,5 % серебра. Какова масса сплава

и каково первоначальное процентное содержание в нем серебра?(ответ округлить до целых)

ВАРИАНТ 8

1. Цветы при сушке теряют 72 % своей массы. Сколько килограммов цветов надо взять, чтобы приготовить из них $12\frac{1}{4}$ кг сухих цветов?
2. Вкладчик положил в банк деньги под 10%. После начисления процентов, некоторую сумму он изъял, а остаток оставил в банке. После вторичного начисления процентов оказалось, что образовавшаяся на счету сумма на 1% меньше исходной величины вклада. Сколько процентов от исходной суммы было изъято вкладчиком после первого начисления процентов?
3. Имеются два сплава золота и серебра, в одном количество этих металлов находится в отношении 2:3, в другом – в отношении 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11.
4. Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $\frac{8}{3}$, а разность между исходным числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 18.
5. Двое мастеров, работая вместе, выполняют некоторое задание за30 дней. После шестидневной совместной работы один из них, работая отдельно, может окончить это задание за40 дней. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить задание?
6. Насос может выкачать из бассейна $\frac{2}{3}$ воды за 7,5 минут. Проработав 0,15 часа, насос остановился. Найдите вместительность бассейна, если после остановки насоса в бассейне осталось еще 25 м^3 воды?
7. Велосипедист проехал 40 км из города в деревню. На обратном пути он поехал с той же скоростью, но через 2 ч езды сделал остановку на 20 мин. После остановки он увеличил скорость на 4 км/ч и поэтому потратил на весь обратный путь из деревни в город столько же времени, сколько на путь из города в деревню. Найдите первоначальную скорость велосипедиста.
8. Моторная лодка против течения реки проплыла 10 км, а по течению 9 км, при этом по течению она шла 45 мин, а против течения – 1 ч 15 мин. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.
9. Самолет пролетел $\frac{1}{2}$ расстояния со скоростью 240 км/ч, оставшуюся часть расстояния со скоростью 210 км/ч. Найти среднюю скорость самолета.
10. В одном городе 20 % семей, имеющих кошек, имеют так же и собак; 25 % семей, имеющих собак, имеют так же и кошек; а 20 % всех семей не имеют ни кошек, ни собак. Сколько семей в этом городе имеют и кошек, и собак?

ВАРИАНТ 9

1. Набор химических реактивов состоит из трех веществ, массы которых относятся как 3:7:10. Массу первого вещества увеличили на 8 %, а второго –

на 4 %.На сколько процентов надо уменьшить массу третьего вещества, чтобы масса всего набора не изменилась?

2. Вкладчик положил в банк некоторую сумму под 9 % годовых. Через два года, после очередного начисления процентов, его вклад составил 23762руб.Каков был первоначальный размер вклада?
3. Имеется два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке равно 10 %, во втором – 40 %. После того, как сплавили эти два слитка, получили сплав, процентное содержание меди в котором равно 30 %. Определить массу полученного сплава.
4. Однозначное число увеличили на 10. Если теперь полученное число увеличить на столько же процентов, на сколько и в первый раз, то получится 72. Найдите исходное однозначное число.
5. Для наполнения бассейна через первую трубу потребуется столько же времени, сколько при наполнении через вторую и третью трубы одновременно. Сколько времени потребуется для наполнения бассейна через каждую трубу, если через первую наполняется бассейн на 16 часов быстрее, чем через третью, и на 4 часа быстрее, чем через вторую?
6. Планом было предусмотрено, что предприятие на протяжении нескольких месяцев изготовить 6000 насосов. Увеличив производительность труда, предприятие стало изготавливать в месяц на 70 насосов больше, чем было предусмотрено, и на один месяц раньше установленного срока перевыполнило задание на 30 насосов. На протяжении скольких месяцев было предусмотрено выпустить 6000 насосов?
7. Автомобиль, пройдя путь от A до B, равный 300 км, повернул назад и через 1 ч 12 мин после выхода из B увеличил скорость на 16 км/ч. В результате на обратный путь он затратил на 48 мин меньше. Найдите первоначальную скорость автомобиля.
8. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 16 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Найдите расстояние, пройденное теплоходом за весь рейс, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 10 часов после отплытия из него.
9. Две точки движутся равномерно по окружности в одном направлении. Первая точка проходит окружность на 2 с быстрее второй и догоняет ее каждые 12 с. За какое время проходит окружность первая точка?
10. Вычислить массу и процентное отношение сплава серебра с медью, зная, что сплавив его с 3 кг чистого серебра, получим сплав, содержащий 90 % серебра, а сплавив с 2 кг сплава с 90-процентным содержанием серебра, получим сплав с 84-процентным содержанием серебра.

ВАРИАНТ 10

1. Матроскин продает молоко через магазин и хочет получать за него 25 рублей за литр. Магазин удерживает 20 % стоимости проданного товара. По какой цене будет продаваться молоко в магазине?

2. В начале года в сбербанк было положено 1500 рублей и в конце года снято 575 рублей. Еще через год на книжке оказалось 1050 рублей. Сколько процентов в год начисляется на вклад?
3. Два куска латуни имеют массу 30 килограмм. Первый кусок содержит 5 кг чистой меди, а второй кусок – 4 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 15 % больше первого?
4. Если двузначное число поделить на сумму его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 7. Если же от суммы квадратов цифр этого числа отнять произведение цифр, то получится первоначальное число. Найти это число.
5. Два каменщика, работая вместе, могут выполнить задания за 12 часов. Производительность труда первого и второго каменщиков относятся как 1:3. Каменщики договорились работать поочередно. Сколько времени должен проработать первый каменщик, чтобы это задание было выполнено за 20 часов?
6. Автоматизированная мойка машин обслуживает 20 автомобилей на 5 часов быстрее, чем ручная мойка обслуживает 45 автомобилей. За сколько часов ручная мойка обслужит 105 автомобилей, если автоматизированная мойка обслуживает за 1 час на 7 автомобилей больше, чем ручная?
7. Пешеход и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми 40 км, и встречаются спустя 2 ч после отправления. Затем они продолжают путь, причем велосипедист прибывает в A на 7 ч 30 мин раньше, чем пешеход в B. Найдите скорости пешехода и велосипедиста, полагая, что оба все время двигались с неизменными скоростями.
8. Теплоход прошел по течению реки 96 км и столько же против течения, затратив на весь путь 10 ч. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Определите скорость теплохода в стоячей воде.
9. Поезд проходит через мост длиной 264 метра за 33 с, мимо неподвижного наблюдателя – за 11 с. Найти скорость поезда.
10. Если смешать 8 кг и 2 кг растворов серной кислоты разной концентрации, то получим 12-процентный раствор кислоты. При смешивании двух одинаковых масс тех же растворов получим 15-процентный раствора. Определить первоначальную концентрацию каждого раствора.

ВАРИАНТ 11

1. При покупке ребенку новых лыж с ботинками родителям пришлось заплатить на 35 % больше, чем два года назад, причем лыжи подорожали с тех пор на 20 %, а ботинки – на 70 %. Сколько процентов от стоимости лыж с ботинками составляла два года назад стоимость лыж?
2. 31 декабря 2013 года Алексей взял в банке 9282 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Алексей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Алексей выплатил долг равными платежами за четыре года?

3. Партию молока жирностью 3,2 % разбавили 30 литрами обезжиренного молока. Сколько молока получили, если его жирность оказалась равной 2,8 %?
4. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если её перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 27 больше первоначального. Найти это число.
5. Три токаря выходят на работу с интервалом 1 час. Первый делает в час 6, а второй 5 – деталей. Третий токарь догоняет второго по количеству изготовленных деталей, а ещё через 2 часа догоняет первого. Какова производительность труда третьего токаря?
6. Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объемом 360 литров она заполняет на 10 минут медленнее, чем вторая?
7. Поезд должен был пройти 220 км за определенное время. Через 2 ч после начала движения он был задержан на 10 мин и, чтобы прийти вовремя в пункт назначения, увеличил скорость на 5 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.
8. Катер может пройти 80 км по течению реки и 40 км против течения за 6 ч 30 мин, а 40 км по течению и 80 км против течения за 7 ч. Определите собственную скорость катера и скорость течения реки.
9. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. При этом скорость каждого из них постоянна и на пробег всей дорожки один затрачивает на 5 с меньше другого. Если они начнут бег с общего старта, то окажутся рядом через 30 с. Через какое время они встретятся, если побегут с общего старта одновременно в противоположных направлениях?
10. Чтобы испечь сто блинов, маме требуется 30 минут, а Ане – 40 минут. Андрюша готов съесть 100 блинов за час. Мама с Аней пекут блины без остановки, а Андрюша непрерывно их поедает. Через какое время после начала этого процесса на столе окажется ровно сто блинов?

ВАРИАНТ 12

1. Цена первого товара поднялась на 40 %, а затем еще на 25 %. Цена второго товара поднялась на 30 %, после оказалось, что цена первого товара на 40 % больше, чем второго. На сколько процентов первоначальная цена первого товара больше первоначальной цены второго товара?
2. В банк положен вклад из расчета 8 % годовых. Через год вкладчик добавил сумму, равную 20 % изначального вклада. Сколько процентов от исходной суммы окажется на счете через три года после этого? (ответ округлить до целых)
3. Собрали 140 кг грибов, влажность которых составляла 98 %. После подсушивания их влажность снизилась до 93 %. Какова стала масса грибов после подсушивания?
4. Найти шестизначное число, начинающееся с цифры 1 и такое, что если переставить эту цифру в конец числа, то получится число, в 3 раза больше искомого.
5. Четыре бригады разгружают вагон с продуктами. Первая, вторая и третья бригады вместе могут выполнить эту работу за 8 часов, вторая, третья и

четвертая – за 6 часов 40 минут. Если же будут работать все четыре бригады, то вагон разгрузят за 5 часов. За какое время могут разгрузить вагон первая и четвертая бригады?

6. Прозаик хочет набрать на компьютере рукопись объемом 300 страниц. Если он будет набирать на 5 страниц в день больше, чем запланировал, то закончил работу на 3 дня раньше. Сколько страниц в день планирует набирать на компьютере прозаик?
7. Турист преодолел расстояние в 20 км, причем 1 ч он проехал на велосипеде, а 2 ч прошел пешком. Найти скорость туриста при движении на велосипеде, если каждый километр на велосипеде он преодолевал на 10 мин быстрее, чем пешком.
8. Катер прошел расстояние между пунктами А и В по течению реки за 4 ч 30 мин, а в обратную сторону за 6 ч 18 мин. Определите расстояние между пунктами А и В, если скорость течения реки 2,4 км/ч.
9. Поезд проходит через мост длиной 266 метров за 37 с, мимо неподвижного наблюдателя – за 18 с. Найти длину поезда.
10. Две бригады приступили к работе в 8.00. Сделав вместе 72 детали, они разделились, и к 15.00 за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. Если бы первая бригада делала в час на одну деталь больше, а вторая на одну деталь меньше, то за время раздельной работы первая бригада сделала бы на 8 деталей больше уже к 13.00. Сколько деталей в час делала каждая бригада?

ВАРИАНТ 13

1. Покупатель приобрел костюм со скидкой 20 % и плащ со скидкой 40 %, заплатив в сумме за обе покупки 9180 руб., что на 32 % меньше их суммарной первоначальной стоимости. Найти первоначальную цену костюма и плаща.
2. Вкладчик положил в банк 25000 руб. под некоторый процент годовых. Через год процентная ставка по данному вкладу уменьшилась на 1 %. Через два года его вклад увеличился на 4430 руб. Под какой процент годовых вкладчик вложил деньги первоначально?
3. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих 12,5 % железа, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20 %. Сколько железа осталось в руде?
4. Найти двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.
5. Два насоса различной мощности, работая вместе, наполняют бассейн за4 ч. Для заполнения половины бассейна первому насосу требуется времени на 4 ч больше, чем второму для заполнения трех четвертей бассейна. За какое время может наполнить бассейн каждый насос в отдельности?
6. Опытный рабочий изготавливает 40 деталей на 2 часа быстрее, чем молодой рабочий изготавливает 30 деталей. За сколько часов оба этих рабочих изготовят вместе 120 деталей, если за один час опытный рабочий изготавливает на 5 деталей больше молодого рабочего?

7. Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав $\frac{2}{3}$ расстояния от A до B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B (время, потребовавшееся на передачу почты, считается равным нулю). При этом почта была доставлена из A в B за время, необходимое, чтобы проехать от A до B со скоростью 40 км/ч. Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от A до B со скоростью 100 км/ч. Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.
8. Расстояние между двумя пунктами по реке равно 14 км. Лодка проходит этот путь по течению за 2 ч, а против течения за 2 ч 48 мин. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.
9. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 20 км. Через сколько минут мотоциклы поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 12 км/ч больше скорости другого?
10. К 9 литрам водного раствора кислоты добавили 3 литра чистой воды. Смесь тщательно перемешали, а затем 3 литра раствора отлили. Эту процедуру выполнили еще 2 раза, после чего получили 9 литров 27 % раствора кислоты. Какова была исходная концентрация кислоты в растворе?

ВАРИАНТ 14

1. Фермер планирует в этом году продать моркови на 10 % меньше, чем в прошлом году. На сколько процентов ему надо повысить цену на морковь, чтобы получить за нее на 8 % больше денег, чем в прошлом году?
2. 31 декабря 2013 года Родион взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Родион переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за четыре года; если по 2 674 100рублей, то за два года. Под какой процент Родион взял деньги в банке?
3. При смешивании 40-процентного раствора кислоты с 10-процентным раствором получили 800 г 21,25-процентного раствора кислоты. Сколько граммов каждого раствора было для этого взято?
4. Если приписать к двузначному числу цифру 7 сперва слева, потом справа, то разность полученных трехзначных чисел будет равна 351. Найти первоначальное число.
5. Две бригады должны были закончить заказ за 12 дней. После восьми дней совместной работы первая бригада получила другое задание, поэтому вторая бригада заканчивала выполнение заказа еще 7 дней. За сколько дней могла бы выполнить заказ каждая бригада?
6. В помощь садовому насосу, перекачивающему 7 литров воды за4 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 5 минут.

Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 63 литра воды?

7. Из пункта A в пункт B отправился товарный поезд. Через 1,5 ч вслед за ним отправился пассажирский поезд, скорость которого на 5 км/ч больше скорости товарного. Спустя 15 ч после своего выхода пассажирский поезд не только обогнал товарный, но и был впереди на 21 км. Найти скорость товарного поезда.
8. Турист, проплыв по течению реки на плоту 12 км, возвратился обратно на лодке, скорость которой в стоячей воде 5 км/ч. На все путешествие турист потратил 10 часов. Найдите скорость течения реки, если известно, что она меньше, чем 3 км/ч.
9. Две точки движутся по окружности в одном и том же направлении. Длина окружности равна 24 м. Первая точка обходит окружность на 9 мин быстрее второй и обгоняет вторую каждые 4 мин. Определить скорости точек.
10. Имеется два слитка золота с медью. Первый содержит 230 г золота и 20 г меди, а второй – 240 г золота и 60 г меди. От каждого слитка взяли по куску, сплавили их и получили 300 г сплава, в котором оказалось 84 % золота. Определить массу куска, взятого от первого слитка.

ВАРИАНТ 15

1. За последний год численность населения города уменьшилась на 4 %, а число безработных увеличилось на 5 %. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8 %.
2. В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?
3. Кусок первого сплава меди и олова весом 1 кг содержащий 30 % меди. При сплавлении этого куска с некоторым количеством второго сплава меди и олова, содержащего 40 % олова, получился сплав, в котором содержание меди и олова относилось как 2:3. Сколько килограммов второго сплава было добавлено?
4. Ученику надо было умножить 78 на двузначное число, в котором цифра десятков втрое больше цифры единиц. По ошибке он переставил цифры во втором сомножителе, отчего и получил произведение на 2808 меньше истинного. Чему равно истинное произведение?
5. Две бригады, работая совместно, закончили посадку деревьев за 4 дня. Сколько дней понадобилось бы на посадку деревьев каждой бригаде, если одна из бригад могла бы закончить посадку деревьев на 6 дней быстрее другой?
6. Первый рабочий делает за час на 5 деталей больше, чем второй. На сколько часов больше затратит второй рабочий на изготовление 800 деталей, если первый рабочий за час делает 25 деталей?
7. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 6 км, одновременно вышли навстречу друг другу два пешехода. Пешеход, шедший из A, пришел в B через

24 мин, а другой пешеход пришел в A через 54 мин после их встречи. Через какое время после выхода пешеходов состоялась встреча и на каком расстоянии от пункта A?

8. Лодка может проплыть 18 км по течению реки и еще 2 км против течения за то же время, какое требуется плоту, чтобы проплыть 8 км по этой реке. Найдите скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки 8 км/ч.
9. Две точки движутся по окружности длиной 1,2 м с постоянными скоростями. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 с. Определить скорости точек.
10. При привлечении к работе двух механизмов различной производительности задание выполнится за 30 часов. Однажды совместная работа двух механизмов продолжалась только 6 часов, после чего первый механизм был остановлен и всю остальную работу выполнил второй за 40 часов. За какое время эту же работу мог выполнить каждый механизм?

Примерный вариант теста

1. Число 15 составляет от числа 125

1) 25 % 2)7 % 3) 15 % 4) 12 %

2. Клиент открыл в банке счет и положил срочный вклад 500 тыс. рублей. Сумма вклада (тыс. руб.) через 2 года, если банк начисляет сложные проценты по ставке 30% годовых и дополнительных вложений не поступало:

1) 620 2) 560 3) 845 4) 515

3. Смешали два раствора соли по 250 г каждый. Концентрация первого раствора 12 %, второго – 24 %. Тогда концентрация полученного раствора составляет

1) 25 % 2)7 % 3) 15 % 4) 12 %

4. В ювелирном изделии массой 4 г содержание золота составляет 75 % от общей массы изделия. Масса золота (в г), содержащаяся в изделии, равна

Ответ:_______.

5. Катер прошел 12 км по течению реки и 4 км против течения, затратив на весь путь 1 час. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 3 км/ч. Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если за x обозначена собственная скорость катера (в км/ч).

1) $\frac{12}{x+3}-\frac{4}{x-3}=1$ 2) $\frac{12}{x+3}+\frac{4}{x-3}=1$

3) $12(x+3)+4(x-3)=1$ 4) $\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x+3}=1$

6. Мастер изготавливает 15 деталей за 45 минут, а ученик – 15 деталей за 60 минут. Дневную норму мастер выполнил на 25 минут раньше, чем ученик. Чему равна дневная норма? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если за x обозначено количество деталей, составляющих дневную норму.

1) $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=25$ 2) $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=25$

3) $4x-3x=25$ 4) $\frac{4}{x}-\frac{3}{x}=25$

7. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Исходное число равно

Ответ: ______.

8. Расстояние, равное 960 км, первый автомобиль проходит на 2 часа быстрее второго. За время, которое требуется первому автомобилю на прохождение 60 км, второй успевает пройти 50 км. Скорости автомобилей (в км/ч)

Ответ: _______.

9. Первый насос перекачивает 90 $м^3$ воды на 1 час быстрее, чем второй 100 $м^3$,причем, за час первый перекачивает на 5 $м^3$ воды больше, чем второй. Объем воды (в $м^3$), который ежечасно перекачивает первый насос, равен

Ответ: _________.

10. Изделие, цена которого 500 рублей, сначала подорожало на 10 %, а затем еще на 20 %. В итоге изделие стало продаваться по цене:

Ответ: _________.

Заключение

Математическое образование играет исключительную роль во всей образовательной структуре. Элементарная математика является не только базой естественных наук и экономики, но и важнейшей составляющей интеллектуального развития школьников.

Курс «Элементарная математика» раскрывается на системе целесообразно подобранных задач. Значительное место занимают в этой системе текстовые задачи. Они необходимы для того, чтобы сформировать у студентов важные для обыденной жизни знания, а на их базе – умения и навыки, связанные с решением постоянно возникающих проблемных ситуаций.

Но чтобы решить проблему, нужно понять ее суть, сформулировать задачу словесно, создать математическую интерпретацию решаемой проблемы, выбрать методы и способы достижения поставленной цели. Через решение задач студенты знакомятся с важными в познавательном и воспитательном отношении фактами. Поскольку процесс решения текстовой задачи зачастую может быть организован не единственным образом, то важным показателем математической обученности является его умение выбрать наиболее рациональный способ решения поставленной задачи. Поэтому очень важно научить будущих педагогов в широком смысле слова работать с задачей.

Каждая конкретная учебно-математическая задача предназначена для достижения чаще всего не одной, а нескольких целей: педагогической, учебной, дидактической, а формулировки этих целей подсказывает содержание самой задачи. Вариативность методов обучения математике помогает студентам глубже окунуться в тему, более осознанно усвоить учебный материал, научиться общаться с коллективом, развивать самостоятельность.

В различные периоды развития математического образования проблема обучения решению текстовых задач оставалась одной из самых актуальных. Этой проблеме посвящены многочисленные исследования, предметом которых являются различные аспекты обучения решению текстовых задач: отбор их содержания и система подачи, функции текстовых задач в процессе обучения математике; роль задач в формировании математических понятий и учебной деятельности, в развитии логического мышления.

Текстовая задача – описание некоторой ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между её компонентами или определить вид этого отношения.

Текстовая задача представляет собой словесную модель ситуации, явления, события, процесса и т.п. Как в любой модели, в текстовой задаче описывается не все событие или явление, а лишь его количественные и функциональные характеристики.

Математическая задача – это связанный лаконический рассказ, в котором введены значения некоторых величин и предлагается отыскать другие неизвестные значения величин, зависимые от данных и связанные с ними определенными соотношениями, указанными в условии.

Любая текстовая задача состоит из двух частей: условия и требования (вопроса). Числовые значения величин и существующие между ними зависимости, т.е. количественные и качественные характеристики объектов задачи и отношений между ними, называют условием (или условиями) задачи.

Решить задачу в широком смысле этого слова – это, значит, раскрыть связи между данными, указанными условием задачи, и искомыми величинами, определить последовательность применения общих положений математики (правил, законов, формул и т.п.), выполнить действия над данными задачи, используя эти общие положения, и получить ответ на требование задачи или доказать невозможность его выполнения.

Значит, для того чтобы научиться решать задачи, надо разобраться в том, что собой они представляют, как они устроены, из каких составных частей они состоят, каковы инструменты, с помощью которых производится решение задач. Основная особенность текстовых задач состоит в том, что в них не указывается прямо, какое именно действие (или действия) должно быть выполнено для получения ответа на требование задачи.

Четыре этапа решения задачи.

Важнейшим этапом решения задачи является первый этап – восприятие задачи (анализ текста). Цель этапа – понять задачу, т.е. выделить все множества и отношения, величины и зависимости между ними, числовые данные, лексическое значение слов.

Результатом выполнения этого этапа является понимание задачи, так как с точки зрения психологии восприятие текста – это его понимание. Не поймешь задачу – не решишь ее. Для того чтобы добиться понимания задачи, полезно воспользоваться разными приемами, которые накопились в современной методике.

Приемы выполнения анализа задачи:

- драматизация, обыгрывание задачи;
- разбиение текста задачи на смысловые части;
- постановка специальных вопросов;
- переформулировка текста;
- перефразирование задачи (заменить термин содержанием; заменить описание термином, словом; заменить слово синонимом; убрать несущественные слова; конкретизировать, добавив не меняющие смысл подробности);
- построение модели (схема, рисунок, таблица, чертеж, предметная модель, выражение);
- определение вида задачи и выполнение соответствующей схемы – краткой записи.

Второй этап – поиск плана решения. Долгие годы методисты именно этот этап называли основным, но до него надо еще дойти, добраться. Цель этапа – соотнести вопрос с условием.

Данный этап требует рассуждений, но если их осуществлять устно, как часто бывает, то многие дети, особенно «визуалы», не освоят умения искать план решения задачи. Нужны приемы графической фиксации подобных рассуждений. Такие приемы, как граф-схема и таблица рассуждений, существуют в российской методике более 100 лет.

Приемы выполнения этапа:

- рассуждения (от условия к вопросу; от вопроса к условию; по модели; по словесному заданию отношений);

- составление уравнения;

- частный подход решения задач, название вида, типа задачи [21, 63].

Третий этап решения задачи – выполнение плана – наиболее существенный этап, особенно при арифметическом решении задачи. Цель этапа – выполнить операции в соответствующей математической области (арифметика, алгебра, геометрия, логика и др.) устно или письменно.

Приемы выполнения этапа:

- арифметические действия, оформленные выражением, по действиям (без пояснения, с пояснением, с вопросами);

- измерение, счет на модели;

- решение уравнений;

- логические операции;

Четвертый этап – проверка выполненного решения. Цель этапа – убедиться в истинности выбранного плана и выполненных действий, после чего сформулировать ответ задачи.

Обучение решению задач – это специально организованное взаимодействие учителя и учащихся, цель которого – формирование у учащихся умения решать задачи. Решение задач вообще и математических в частности, по своей сути – процесс творческий, требующий продуктивной деятельности.

Применительно к решению текстовых задач в отечественной начальной школе используется следующая шкала уровней:

Высокому уровню сформированности умения решать задачи соответствуют работы и ответы, в которых ученик может самостоятельно и безошибочно решить задачу (составить план, решить, объяснить ход решения и точно сформулировать ответ на вопрос задачи).

Среднему уровню сформированности умения решать задачи соответствуют работы и ответы, в которых ученик допускает отдельные неточности в формулировках, допускает ошибки в вычислениях и решениях задач, но исправляет их сам или с помощью учителя. При этом в работах не должно быть более одной грубой и трех-четырех негрубых ошибок.

Низкому уровню сформированности умения решать задачи соответствуют работы и ответы, в которых ученик не справляется с решением задач и вычислениями в них даже с помощью учителя. Допускает 2 и более грубых ошибки.

Дифференцированная работа на уроках математики чаще всего организуется так: учащимся с низким и ниже среднего уровнем обученности предлагаются репродуктивные задания, а ученикам со средним, выше среднего и высоким уровнем обученности – творческие задания.

В заключении сформулируем несколько положений, к аргументации которых мы еще вернемся при освещении методики работы с соответствующим задачным материалом.

1. Текстовые задачи являются важным средством обучения математике. С их помощью учащиеся получают опыт работы с величинами, постигают

взаимосвязи между ними, получают опыт применения математики к решению практических (или правдоподобных) задач.

2. Использование арифметических способов решения задач развивает смекалку и сообразительность, умение ставить вопросы, отвечать на них, то есть развивает естественный язык, готовит школьников к дальнейшему обучению.

3. Арифметические способы решения текстовых задач позволяют развивать умение анализировать задачные ситуации, строить план решения с учетом взаимосвязей между известными и неизвестными величинами (с учетом типа задачи), истолковывать результат каждого действия в рамках условия задачи, проверять правильность решения с помощью составления и решения обратной задачи, то есть формировать и развивать важные общеучебные умения.

4. Арифметические способы решения текстовых задач приучают детей к первым абстракциям, позволяют воспитывать логическую культуру, могут способствовать созданию благоприятного эмоционального фона обучения, развитию у школьников эстетического чувства применительно к решению задачи (красивое решение!) и изучению математики, вызывая интерес сначала к процессу поиска решения задачи, а потом и к изучаемому предмету.

5. Использование исторических задач и разнообразных старинных (арифметических) способов их решения не только обогащают опыт мыслительной деятельности учащихся, но и позволяют им осваивать важное культурно-историческое наследие человечества, связанный с поиском решения задач. Это важный внутренний (связанный с предметом), а не внешний (связанный с отметками, поощрениями и т.п.) стимул к поиску решений задач и изучению математики.

У учителей, особенно у молодых специалистов, часто возникают трудности с отбором содержания материала, с планированием работы, при подготовке школьников к итоговой аттестации. Поэтому данное пособие предназначено для учителей средних общеобразовательных школ, студентов физико-математических факультетов techинститутов. Оно может оказать помощь учителям математики при организации работы по изучению математики в 9 классе общеобразовательной школы.

Список литературы

1. Байрамукова, П.У. Методика обучения математике в начальных классах: курс лекций / П.У. Байрамукова, А.У. Уртенова. – Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 299 с.
2. Бантова, Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах / Г.В. Бантова, А.М. Бельтюкова. – М.: Просвещение, 1978. – 304 с.
3. Белошистая, А.В. Методика обучения математике в начальной школе: курс лекций / А.В. Белошистая. – М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2005. – 455с.
4. Белошистая, А.В. Методика работы с текстовыми логическими заданиями / А.В. Белошистая // Начальная школа. – 2007. – № 8. – С. 42 – 45.
5. Болотова, А.И Развитие познавательной самостоятельности младших школьников средствами математики / А.И. Болотова // Начальная школа плюс. – 2011. – № 6. – С. 71 – 74.
6. Бормотова, М.М. Электронная модель содержания образования и подготовка к урокам математики в ОС «Школа 2100» / М.М. Бормотова, Е.А. Леонова // Начальная школа плюс. – 2013. – № 10. – С. 31 – 37.
7. Деменева, Н.Н. Формирование универсального действия прогнозирования на уроках математики / Н.Н. Деменева // Начальная школа. – 2013. – № 9. – С. 52 – 55.
8. Демидова, Т.Е. Теория и практика решения текстовых задач / Т.Е. Демидова, А.П. Тонких. – М.: Издательский центр «Академия», 2002. – 288 с.
9. Демидова, Т.Е. Математика. Учебник для 4-го класса в 3-х частях. Часть 1 / Т.Е. Демимдова, С.А. Козлова, А.П. Тонких. – М.: Баланс; Школьный дом, 2011. – 96с.: ил (Образовательная система «Школа 2100»)
10. Демидова, Т.Е. Математика. Учебник для 4-го класса в 3-х частях. Часть 1 / Т.Е. Демидова, С.А. Козлова, А.П. Тонких. – М.: Баланс; Школьный дом, 2013. – 96с.: ил (Образовательная система «Школа 2100»).
11. Демидова, Т.Е. Формирование умений самоконтроля у младших школьников на уроках математики / Т.Е. Демидова, И.Н. Чижевская // Начальная школа плюс. – 2013. – № 10. – С. 10 – 15.
12. Егорина, В.С. Формирование универсальных логических действий младших школьников и повышение эффективности образования / В.С. Егорина // Начальная школа плюс. – 2013. – № 10. – С. 38 – 42.
13. Истомина, Н.Б. Методика обучения математике в начальных классах / Н.Б. Истомина. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 288 с.
14. Мендыгалиева, А.К. Методические приёмы при обучении решению задач в начальной школе / А.К. Мендыгалиева // Начальная школа плюс До и После. – 2013. – № 10. – С. 43 – 47.
15. Пичугин, С.С. Графическое моделирование в работе над текстовой задачей / С.С. Пичугин // Начальная школа. – 2009. – №5. – С. 41 – 45.
16. Селькина, Л.В. Методические подходы к формированию представлений о задаче, решаемой в несколько действий / Л.В. Селькина. – Начальная школа. – 2013. – № 6. – С. 63 – 70.
17. Смирнова, А.А. Метод варьирования текстовых задач по математике

как средство повышения осознанности знаний учащихся начальных классов / А.А. Смирнова, Н.С. Чернышова, Е.В. Милейко // Начальная школа. – 2011. – № 4. – С. 54 – 59.

18. Смирнова, В.В. Некоторые приёмы обучения задач в начальной школе / В.В. Смирнова // Начальная школа плюс До и После. – 2012. – № 4. – С. 57 – 58.

19. Стойлова, Л.П. Математика / Л.П. Стойлова. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 424 с.

20. Уроки математики: Методические рекомендации к учебнику для 4 класса общеобразовательных организаций / Н.Б. Истомина, З.Б. Редько, Е.С. Немкина, Н.Б. Тихонова. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2014. – 264с.

21. Фатеева, Н.И. Образовательные программы начальной школы / Н.И. Фатеева. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 176 с.

22. Шадрина, И.В. Обучение математике в начальных классах / И.В. Шадрина. – М.: Школьная Пресса, 2003. – 144 с.

Электронные ресурсы

23. Лернер, И.Я. Развитие мышления учащихся в процессе обучения [Электронный ресурс]: http // lerner_i_ja_evelopment.pdf

24. Методические рекомендации [Электронный ресурс]: http://knowledge.allbest.ru/pedagogics/2c0a65625a2bc78b5c53b88421306c27_0.html

25. Скаткин, М.Н. Дидактика общего образования [Электронный ресурс]: http // itiprao.ru›index.phpid…ltemid…option=com…article

26. Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования (утверждён приказом Министерства образования и науки РФ от 06.12.2009 №373); в ред. приказов от 26.11. 2010 № 1241, от 22.09.2011 № 2357 [Электронный ресурс]: http: // www.ug.ru/new_dtandarts/3

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРОГРАММА КУРСА «ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ»

Пояснительная записка.

Программа по учебной части, формируемой участниками образовательного процесса «Текстовые задачи» (далее Программа) разработана на основе Требований к результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования (далее ООП ООО), Программы формирования универсальных учебных действий, Примерной программы основного общего образования по математике - М. «Просвещение», 2011. Данная программа предназначена для достижения планируемых результатов по математике в 5 «А» классе. А также с использованием авторской программы: Программы. Математика. 5-6 классы / авт.-сост. И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. - М. Мнемозина, 2011;

Цель курса: создание условий, обеспечивающих интеллектуальное развитие личности школьника на основе развития его индивидуальности; создание фундамента для математического развития, формирование механизмов мышления и расширение общего кругозора ребенка в процессе решения практических задач.

Задачи курса:

- пробуждение и развитие устойчивого интереса учащихся к математике и ее приложениям, расширение кругозора;
- расширение и углубление знаний по предмету;
- раскрытие творческих способностей учащихся;
- развитие у учащихся умения самостоятельно и творчески работать с учебной и научно-популярной литературой;
- воспитание твердости в пути достижения цели (решения той или иной задачи);
- решение специально подобранных упражнений и задач, натравленных на формирование приемов мыслительной деятельности;
- формирование потребности к логическим обоснованиям и рассуждениям;
- специальное обучение математическому моделированию как методу решения практических задач;
- применение знаний в новых условиях.
- работа с одаренными детьми в рамках подготовки к предметным олимпиадам и конкурсам.
- воспитание у учащихся чувства коллективизма и умения сочетать индивидуальную работу с коллективной.

Общая характеристика учебного предмета

Данная программа призвана помочь учащимся развить умения и навыки в решении задач, научить грамотному подходу к решению текстовых задач. Курс содержит различные виды арифметических задач. С их помощью учащиеся получают опыт работы с величинами, постигают взаимосвязи между ними, приобретают опыт применения математики к решению практических задач.

При решение текстовых задач формируются навыки смыслового чтения и работы с текстом, таких как:

- находить необходимую информацию в тексте;
- ориентироваться в содержании текста;
- понимать смысл текста;
- находить различные виды взаимосвязи между частями текста;
- объяснять предназначение рисунков, схем, графиков, таблиц;
- построение ответов на вопросы к тексту;
- формулировать вопросы к тексту;

- объяснение смысла текста и его единиц.
- структурировать текст (деление на части, составление плана текста);
- выделять тезисы к плану текста;
- обнаруживать в тексте доводы в подтверждение выдвинутых тезисов;
- составление простейших схем по тексту.

Изучение данного курса актуально в связи с тем, что рассмотрение вопроса решения текстовых задач не выделено в отдельные блоки учебного материала. Решение задач встречается в разных темах и не указываются основные общие способы их решения, как правило, не выделяются одинаковые взаимосвязи между компонентами задачи. К тому же, недостаточно внимания уделяется решению задач на проценты, которые рассматриваются в 5 классе и затем встречаются в экзаменационных работах за курс основной и средней (полной) общей школы. Арифметические способы решения текстовых задач позволяют развивать умение анализировать задачные ситуации, строить план решения с учётом взаимосвязей между известными и неизвестными величинами (с учётом типа задачи), истолковывать результат каждого действия в рамках условия задачи, проверять правильность решения с помощью обратной задачи, то есть формулировать и развивать важные общеучебные умения.

Использование алгоритмов, таблиц, рисунков, общих приемов дает возможность ликвидировать у большей части учащихся страх перед текстовой задачей, научить распознавать типы задач и правильно выбирать прием решения.

Содержание курса объединено в 5 тематических модулей, каждый из которых рассматривает задачи определенного содержания.

Все образовательные блоки предусматривают не только усвоение теоретических знаний, но и формирование деятельностно - практического опыта.

Практические задания способствуют развитию у детей творческих способностей, умения создавать математические модели.

Результаты обучения по данному курсу достигаются в каждом образовательном блоке. В планирование содержания включены итоговые уроки, которые проводятся в конце изучения каждого тематического блока.

В качестве основной формы проведения курса выбрано комбинированное тематическое занятие, на котором решаются упражнения и задачи по теме занятия, заслушиваются сообщения учащихся, проводятся игры, викторины, математические эстафеты и т.п., рассматриваются олимпиадные задания, соответствующей тематики.

Методическое обеспечение образовательного процесса.

Занятия по данной программе состоят из теоретической и практической частей. Причем большее количество времени занимает практическая часть. Форма занятий определяется как исследовательско-поисковая деятельность детей.

На занятиях учащиеся знакомятся с различными видами текстовых задач с конкретно-практическим содержанием. Освоение материала в основном происходит в процессе практической творческой деятельности. Взаимосвязи компонентов задачи, а также способ нахождения каждого из них представляются в виде правил, алгоритмов.

Прохождение каждой новой теоретической темы предполагает постоянное повторение пройденных тем, обращение к которым диктует практика. Такие методические приемы, как «забегание вперед», «возвращение к пройденному» придают объемность «линейному», последовательному изложению материала в данной программе, что способствует лучшему ее усвоению.

Для того, чтобы подвести детей, особенно 11-12 лет, к освоению системы понятий, предлагается метод применения образных моделей. Процесс учебного познания в случае применения данного метода делится на три стадии: формирование представлений об элементах задачи или закономерности, подсказка в виде схемы или таблицы и наложение увиденной в данной модели системы взаимосвязей элементов на конкретный материал познаваемого предмета. Таким образом, применение данного метода позволяет восстановить оптимальный баланс образного и понятийного мышления и тем самым приобщить ребенка к основным категориям и закономерностям освоения теории буквально с первых шагов обучения.

При всей важности освоения теоретических знаний следует учитывать, что они являются средством для достижения главной цели обучения, основой для практических занятий. Создание математической модели конкретно-практической жизненной ситуации представляет собой сложную творческую деятельность, состоящую из четырех основных действий: это анализ условия задачи, выявление компонентов задачи и их взаимосвязи, составление и осуществление плана решения задачи, прикидка и корректировка результатов. Каждое из этих действий, в свою очередь, делится на ряд операций, поэтому достижение успешного результата возможно лишь с опорой на дидактический принцип разделения сложной задачи на простые составляющие.

Прием объяснения ребенком собственных действий, а также прием совместного обсуждения вопросов, возникающих по ходу работы, с педагогом или другими детьми при индивидуально-групповой форме занятий помогают расширить представления о средствах, способах, возможностях данной творческой деятельности и тем самым способствуют развитию логики, грамотной математической речи.

Ведущие формы, методы и технологии

Поскольку ведущим в ФГОС является системно - деятельностный подход, формы, методы и технологии направлены на его реализацию:

- Технология проблемного диалога;
- Метод проектов;
- Коллективный способ обучения (КСО)
- Игровые технологии

Реализация СДП обучения опирается на методы:

- активные;
- интерактивные;
- исследовательские;
- проектные.

Дети учатся аргументировано излагать свои мысли, идеи, анализировать свою деятельность, предъявляя результаты рефлексии, анализа групповой, индивидуальной и самостоятельной работы

Описание места учебного предмета, курса в учебном плане

В соответствии с учебным планом школы. Программа курса рассчитана на 34 часа. Периодичность занятий – 1 раз в неделю.

Личностные, метапредметные и предметные результаты освоения учебного предмета, курса

Личностными результатами реализации программы станет формирование представлений о математике, как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества. Так же формирование и развитие универсальных учебных умений самостоятельно *определять, высказывать, исследовать и анализировать, соблюдая* самые простые общие для всех людей правила поведения при общении и сотрудничестве (этические нормы общения и сотрудничества).

Метапредметными результатами реализации программы станет формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности, а именно следующих универсальных учебных действий.

Регулятивные УУД:

- Самостоятельно формулировать цели занятия после предварительного обсуждения.
- Учиться, совместно с учителем, обнаруживать и формулировать учебную проблему.
- Составлять план решения проблемы (задачи).

- Работая по плану, сверять свои действия с целью и, при необходимости, исправлять ошибки.
- В диалоге с учителем учиться вырабатывать критерии оценки и определять степень успешности выполнения своей работы и работы всех, исходя из имеющихся критериев.

Познавательные УУД:

- Ориентироваться в своей системе знаний: самостоятельно *предполагать,* какая информация нужна для решения той или иной задачи.
- *Отбирать* необходимые для решения задачи источники информации среди предложенных учителем словарей, энциклопедий, справочников, интернет-ресурсов.
- Добывать новые знания: *извлекать* информацию, представленную в разных формах (текст, таблица, схема, иллюстрация и др.).
- Перерабатывать полученную информацию: *сравнивать* и *группировать* факты и явления; определять причины явлений, событий.
- Перерабатывать полученную информацию: *делать выводы* на основе обобщения знаний.
- Преобразовывать информацию из одной формы в другую: *составлять* более простой *план* учебно-научного текста.
- Преобразовывать информацию из одной формы в другую: *представлять информацию* в виде текста, таблицы, схемы.

Коммуникативные УУД:

- Донести свою позицию до других: *оформлять* свои мысли в устной и письменной речи с учётом своих учебных и жизненных речевых ситуаций.
- Донести свою позицию до других: *высказывать* свою точку зрения и пытаться её *обосновать,* приводя аргументы.
- Слушать других, пытаться принимать другую точку зрения, быть готовым изменить свою точку зрения.
- Читать вслух и про себя тексты научно-популярной литературы и при этом: вести «диалог с автором» (прогнозировать будущее чтение; ставить вопросы к тексту и искать ответы; проверять себя); отделять новое от известного; выделять главное; составлять план.
- Договариваться с людьми: выполняя различные роли в группе, сотрудничать в совместном решении проблемы (задачи).
- Учиться уважительно относиться к позиции другого, учиться договариваться.

Предметными результатами реализации программы станет создание фундамента для математического развития, формирование механизмов мышления, характерных для математической деятельности, а именно:

- осознавать значение математики для повседневной жизни человека;
- уметь работать с математическим текстом, грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, применять математическую терминологию и символику;
- уметь приводить логические обоснования, простейшие доказательства;
- уметь решать текстовые задачи арифметическим способом;
- овладеть приемами решения уравнений, применения уравнений для решения текстовых задач;
- уметь применять изученные понятия и методы при решении стандартных и нестандартных текстовых задач.
- рассуждать при решении логических задач, задач на смекалку, задач на эрудицию и интуицию
- расширить свой кругозор, осознать взаимосвязь математики с другими учебными дисциплинами и областями жизни;
- познакомиться с алгоритмом исследовательской деятельности и применять его для решения задач математики и других областей деятельности;
- приобрести опыт самостоятельной деятельности по решению учебных задач;
- приобрести опыт презентации собственного продукта.

Учебно-тематический план.

№ п/п	Раздел	Кол-во часов	Виды занятий		Формы контроля	
			Сам.р	Творческая мастерская	Контрольные работы	Зачет
1	Задачи на натуральные числа	13		1		
2	Задачи на дроби	6		1		
3	Задачи на проценты	9		1		
4	Комбинированные задачи	5		1		
5	Итоговое занятие - игра «Восхождение на вершину знаний»	1				
	Итого	34		4		

Календарно-тематическое планирование:

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Дата проведени я</th><th>Тема урока</th><th>Основные виды учебной деятельности</th><th>Средства обучения</th><th>Контроль</th></tr>
<tr><td colspan="6">Задачи на натуральные числа (13 часов)
Формирование УУД:
Личностные: формирование математической компетентности; формирование ценностных ориентации;
Регулятивные: умение выделять свойства в изучаемых объектах и дифференцировать их; овладение приемами контроля и самоконтроля усвоения изученного; работа по алгоритмам, с памятками, правилами - ориентирами по формированию общих приемов учебной деятельности по усвоению математических понятий;
Познавательные: осознание, что такое свойства предмета - общие, различные, существенные, несущественные; использование знаково - символической записи математического понятия; использование индуктивного умозаключения; умение приводить контрпримеры; Коммуникативные: умение выражать свои мысли; владение монологической и диалогической формами речи, современными средствами коммуникации; совершенствование навыков работы в группе.
Предметные результаты:
Знать: основные понятия (скорость, время, расстояние) и формулы, по которым они находятся; о разных видах задач (виды движения по суше: встречное, в одном направлении, в противоположном направлении, вдогонку; виды движения по воде: по течению, против течения, в стоячей воде) и их особенности; основные компоненты задачи: цена, количество, стоимость и их взаимозависимость; правила нахождения компонентов задачи.
Уметь: оперировать основными понятиями; переводить условие задачи на математический язык и составлять математическую модель; определять способ решения задачи; правильно строить свои умозаключения; находить часть по целому и целое по его части, решение задач на движение вызывает некоторые затруднения у учащихся. Необходимо выделить такие понятия, как скорость сближения/ удаления, как собственная скорость, скорость течения, скорость по течению и скорость против течения. В задачах на движение представлены реальные ситуации, некоторые из которых можно разыграть на занятии: прогулки от дома до школы, от дома до кинотеатра, от кафе до стадиона, одного населенного пункта до другого; соревнования на лыжах, велосипедах, автомобилях, по плаванию, движение на различном транспорте от одного пункта до другого; движение по течению реки и против течения на теплоходе, катере, корабле.</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>Введение в курс</td><td rowspan="3">Правильно использовать в речи термины: условие, решение, вопрос задачи, ответ. Выделять взаимосвязей данных и искомых величин в задаче.
Выделять этапы решения текстовой задачи. Название компонентов и результатов арифметических действий. Уметь строить логическую цепочку рассуждений, критически оценивать полученный ответ, осуществлять самоконтроль,</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>Задачи на сложение и вычитание натуральных чисел.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>Задачи на умножение и деление натуральных</td><td></td><td></td></tr>
</table>

			проверяя ответ на соответствие условию задачи. Выполнять арифметические действия с натуральными числами при решении задач.		
4		Задачи на части	Упрощать выражения, определять компоненты, части, составлять схем решения задач на части. Применять алгоритм решения задач на части.		
5		Задачи на части			
6		Задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности			
7		Решение задач на движение тел в одном направлении.	Определять виды движения по суше: встречное, в одном направлении, в противоположном направлении, вдогонку. Грамматически верно читать используемые формулы, выполнять вычисления по формулам. Использовать знания о зависимостях между величинами скорость, время, путь. Определять способ решения задачи по суше; правильно строить свои умозаключения.		
8		Решение задач на движение тел навстречу друг другу.			
9		Решение задач на движение тел в противоположном направлении.			
10		Решение задач на движение тел вдогонку			
11		Решение задач на движение тел по течению и против течения.	Определять виды движения по воде: по течению, против течения, в стоячей воде. Грамматически верно читать используемые формулы, выполнять вычисления по формулам. Использовать знания о зависимостях между величинами скорость, время, путь. Определять способ решения задачи по суше; правильно строить свои умозаключения.		
12		Решение задач на движение тел по течению и против течения, в тоячей воде.			
13		Творческая мастерская по теме «Задачи на движение».			Творческая мастерска

Задачи на дроби (6 часов)

Задачи на натуральные числа (13 часов)

Формирование *УУД:*

Личностные: формирование математической компетентности; формирование ценностных ориентации;

Регулятивные: умение выделять свойства в изучаемых объектах и дифференцировать их; овладение приемами контроля и самоконтроля усвоения изученного; работа по алгоритмам, с памятками, правилами - ориентирами по формированию общих приемов учебной деятельности по усвоению математических понятий;

<table>
<tr><td colspan="6">Познавательные: осознание, что такое свойства предмета - общие, различные, существенные, несущественные; использование знаково - символической записи математического понятия; использование индуктивного умозаключения; умение приводить контрпримеры; Коммуникативные: умение выражать свои мысли; владение монологической и диалогической формами речи, современными средствами коммуникации; совершенствование навыков работы в группе.
Предметные результаты:
Знать: понятие дроби; основные компоненты задачи; правила нахождения дроби от числа и числа по его дроби
Уметь: проводить анализ полученных результатов в зависимости от величины дроби, решать задачи надроби.</td></tr>
<tr><td>14</td><td></td><td>Задачи на сложение и вычитание обыкновенных дробей</td><td rowspan="6">Выполнять сложение и вычитание обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями.
Анализировать и осмысливать текст задачи, переформулировать условие, извлекать необходимую информацию, критически оценивать полученный ответ Решать текстовые задачи арифметическими способами вычислений, критически оценивать полученный ответ Оперировать понятиями обыкновенной дроби и ее элементов.
Применять алгоритм решения задач на дроби.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td></td><td>Задачи на сложение и вычитание обыкновенных дробей</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td></td><td>Задачи на умножение и деление обыкновенных дробей.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>17</td><td></td><td>Задачи на умножение и деление обыкновенных дробей.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td></td><td>Задачи на нахождение дроби от числа.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>19</td><td></td><td>Задачи на нахождение числа по его дроби.</td><td></td><td>Творческая мастерская</td></tr>
<tr><td colspan="6">Задачи на проценты (9 часов)
Формирование УУД:
Личностные: формирование математической компетентности; формирование ценностных ориентации;
Регулятивные: умение выделять свойства в изучаемых объектах и дифференцировать их; овладение приемами контроля и самоконтроля усвоения изученного; работа по алгоритмам, с памятками, правилами - ориентирами по формированию общих приемов учебной деятельности по усвоению математических понятий;
Познавательные: осознание, что такое свойства предмета - общие, различные, существенные, несущественные; использование знаково - символической записи математического понятия; использование индуктивного умозаключения; умение приводить контрпримеры;
Коммуникативные: умение выражать свои мысли; владение монологической и диалогической формами речи, современными средствами коммуникации; совершенствование навыков работы в группе.
Предметные результаты:
Знать: определение процента, основные способы решения стандартных задач на проценты;
Уметь: решать стандартные задачи на проценты «Нахождение процентов от числа», «Нахождение числа по его процентам», «Изменение</td></tr>
</table>

величины в процентах»; решать задачи на начисление простых процентов; выполнять перевод процентов в дроби и обратно; нахождение процентов от числа и числа по его процентам.					
20		Задачи на нахождение процентов от числа.	Применяют: понятие процента, правила нахождения процентов от числа, числа по его процентам, процентного соотношения; основные способы решения стандартных задач на проценты. Решают задачи на нахождение некоторого процента от данной величины, задачи на нахождение целого по данному проценту. Обосновывают способы решения задач. Выделяют обобщенный смысл и формальную структуру задачи. Выполняют прикидку и оценку в ходе вычислений. *Учащиеся могут самостоятельно подготовить презентации на следующие темы: «Проценты в моей жизни», «Для чего нужно уметь решать задачи на проценты» , «С газетной полосы» и т.п. Решение кроссвордов заставляет искать ответы на разные по степени сложности вопросы. Если ответ находишь легко, то радуешься своим знаниям, если этот поиск труден и долог, найденный в результате его ответ долгое время остаётся в памяти. Особое внимание учащихся в процессе решения задач обратить на задания, содержащиеся в открытых банках заданий ЕГЭ и ГИА.*		
21		Задачи на нахождение процентов от числа.			
22		Задачи на нахождение числа по его процентам.			
23		Задачи на нахождение числа по его процентам.			
24		Решение задач на проценты			
25		Решение задач на проценты			
26		Решение задач на проценты			
27		Решение задач на проценты			
28		Творческая мастерская по теме «Задачи на части, на проценты»			Творческая мастерская

Комбинированные задачи (6 часов)

Формирование *УУД:*

Личностные: формирование математической компетентности; формирование ценностных ориентации;

Регулятивные: умение выделять свойства в изучаемых объектах и дифференцировать их; овладение приемами контроля и самоконтроля усвоения изученного; работа по алгоритмам, с памятками, правилами - ориентирами по формированию общих приемов учебной деятельности по усвоению математических понятий;

Познавательные: осознание, что такое свойства предмета - общие, различные, существенные, несущественные; использование знаково - символической записи математического понятия; использование индуктивного умозаключения; умение приводить контрпримеры;

Коммуникативные: умение выражать свои мысли; владение монологической и диалогической формами речи, современными средствами коммуникации; совершенствование навыков работы в группе.

Предметные результаты:

Знать: понятия уравнение, корень уравнения, решить уравнение; этапы решения задач с помощью уравнения, алгоритм составления уравнения;

основные приемы решения уравнений. Уметь: находить неизвестные компоненты уравнения (слагаемое, вычитаемое, уменьшаемое), решать задачи алгебраическим способом и арифметически; выполнять прикидки и анализ полученного результата.					
29		Решение задач с помощью уравнений	Верно использовать в речи термины: уравнение, корень уравнения. Решать уравнения на основе зависимостей между компонентами арифметических действий. Составлять уравнения по условиям задач. Анализировать текст задачи, извлекать необходимую информацию, моделировать условие с помощью схем, рисунков, реальных предметов: строить логическую цепочку рассуждений; осуществлять самоконтроль, проверяя ответ на соответствие условию.		
30		Решение задач с помощью уравнений			
31		Решение задач с помощью уравнений			
32		Решение задач, решаемых с помощью уравнений, арифметически	Обобщать и систематизировать знания по пройденным темам. Анализировать текст задачи, извлекать необходимую информацию, аргументировать выбор способа решения задачи.		
33		Решение задач, решаемых с помощью уравнений, арифметически			
34		Итоговое занятие Игра «Восхождение на вершину знаний»	Представление составленных и решенных задач, кроссвордов, ребусов; докладов, презентаций по вопросам курса.		Творческая мастерская

Описание учебно-методического и материально-технического обеспечения образовательного процесса

1. Виноградова Л. В., Тиликайнен В.Е. Задачи на нахождение дроби от числа и числа от дроби // Ж. Математика в школе. - 1999. - №4.
2. Гаврилова Т.Д. Занимательная математика. 5-11 классы. (Как сделать уроки математики нескучными) - Волгоград: Учитель, 2005. - 96 с.
3. Гамбарин В. Г. Сборник задач и упражнений по математике. 5 класс: учеб. Пособие для учащихся общеобразоват. учреждений - М.: Мнемозина, 2009. - 144с. : ил.
4. Никольский С.М. Дотапов М.К. Арифметика. Учебник для 5 класса. М.Просвещение,2006.
5. Талызина Н.Ф. Формирование общих приёмов решения арифметических задач//Формирование приёмов математического мышления - М.: ТОО «Вентана -Граф», 1995
6. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи - М.: Просвещение, 1984
7. Шевкин А. В. Обучение решению текстовых задач в 5-6 классах.: Книга для учителя. - М/.Галс плюс, 1998. - 168 с.
8. Шевкин А.В. Материалы курса "Текстовые задачи в школьном курсе математики": Лекции 1 - 4. М.: Педагогический университет "Первое сентября", 2006. - 88 с.
9. Открытые банки заданий ЕГЭ и ГИА по математике 2016 год.
10. Устные задачи на движение http://komdm.ucoz.ru/index//0- 11.
11. Я иду на урок математики. 5 класс: Книга для учителя. - М.: Первое сентября, 2001. – 352
12. Интерактивный учебник. http:/ www.matematika-na/5class/mat_5_32.php

Планируемые результаты изучения учебного предмета

В результате изучения данного курса учащиеся будут знать:
• основные типы текстовых задач и способы их решения;
• понятие математической модели, составленной по условию задачи;
• правила выполнения арифметических действий с числами.
Учащийся научится:
• переводить условия реальных задач на математический язык;
• решать несложные практические расчетные задачи, извлекая при необходимости информацию из справочных материалов;
• уметь решать основные виды задач составлением уравнений;
• владеть арифметическим способом решения стандартных задач;
• интерпретировать результаты решения задач и проверять их на соответствие исходным данным;
Способны решать следующие жизненно-практические задачи:
•производить прикидку и оценку результата вычислений; проверять результат вычисления на правдоподобие, используя различные приемы;
• проводить расчеты, связанные с вычислением простых процентов.

Система контроля и оцени достижений учащихся, описание основного инструментария для оценки результатов.

Отметка «5» выставляется, если ученик демонстрирует ответственное и сознательное отношение к учению, усвоил теоретический материал курса, получил навыки в применении его при решении конкретных знаний, в работе над индивидуальными заданиями продемонстрировал умение работать самостоятельно, творчески.

Оценка «4» оценивает ученика, который освоил идеи и методы данного курса в такой степени, что может справиться со стандартными заданиями; выполняет задания прилежно, что свидетельствует о возрастании общих умений учащегося и о положительной динамике его интеллектуального роста.

Оценка «3» выставляется ученику, который освоил наиболее простые идеи и методы курса, что позволяет ему успешно выполнять простые задания.

Оценка «2» выставляется ученику, который не проявил ни прилежания, ни заинтересованности в освоении курса, не справляется с решением простых задач.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

КОНСПЕКТ УРОКА ПО МАТЕМАТИКЕ «РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ»

Цели урока: совершенствовать умение решать текстовые задачи; учиться использовать соотношения единиц величин для поиска закономерностей; развитие логического, образного мышления, развитие речи школьников.

ХОД УРОКА

1. Организационный момент.

2. Подготовка к восприятию знаний.

Учащимся предлагается решить задачу:

<u>Задача1.</u> Грузоподъёмность машины 3т. Сколько учебников можно перевезти на такой машине, если один учебник весит 300 г? сколько учебников можно перевезти на машине грузоподъёмностью 5 т.

При решении задачи рекомендуем использовать таблицу:

Масса 1 учебника (г)	Количество (шт)	Общая масса учебников (т)
300	?	3
300	?	5

Становится очевидным, что для нахождения количества учебников необходимо 3 т выразить в граммах:

3 т = 3000 кг = 3 000 000 г.

Теперь можно узнать количество учебников:

3 000 000 : 300.

При вычислении значения данного выражения не следует жалеть времени на обсуждение и обоснование способов действий.

Полезно вспомнить:

- правило деления числа на произведение: 3 000 000 : (3 • 100);
- правило деления на 1 с нулями: (3 00 000 : 100).

<u>Задача 2.</u> Из 100 кг яблок при переработке получают 24 кг сухофруктов.

Задачу можно решить устно.

Ученики заполняют таблицу нарисованную на доске, на основе рассуждений.

Масса яблок (кг)	100	50	25			
Масса сухофруктов (кг)	24			48	96	72

Например, из 100 кг яблок получается 24 кг сухофруктов. Если яблок буде в два раза меньше, то и сухофруктов получиться в два раза меньше (12 кг). А если будет 25 кг яблок, то сухофруктов будет в 4 раза меньше (24 : 4 = 6 (кг). Если сухофруктов будет в два раза больше (24 • 2 = 48 (кг)), то и яблок будет в 2 раза больше (100 • 2 = 200 (кг) и т.д).

Рассуждения по решению задач проговариваются учениками с места.

Задача для совместного решения.

<u>Задача 1.</u> У двух подруг 99 открыток с животными. Для участия в конкурсе девочки наклеили все открытки в альбом так, что на каждой его странице Наташа расположила в альбом по 5 своих открыток, а Вера – по 6. Сколько открыток поместила в альбом Наташа? Вера?

1. Ученики записывают решение задачи:

1) 5 + 6 = 11 (от.) – разместили Наташа и Вера на одной странице;
2) 99 : 11 = 9 (стр.) – заняла открытками каждая девочка в альбоме;
3) 5 • 9 = 45 (от.) – разместила Наташа в альбоме;

4) 6 • 9 = 54 (от.) – разместила Вера в альбоме;

2. Коллективно заполняется таблица на доске.

Количество страниц в альбоме (с.)	1	2	3	4	5			
Количество открыток у Наташи (шт.)	5							
Количество открыток у Веры (шт.)	6							
Количество открыток у Веры и Наташи вместе (шт.)	11							99

3. Пользуясь заполненной таблицей, ученики отвечают на вопросы:
1) Какое количество открыток у Наташи на семи страницах?
2) Какое количество открыток у Веры на четырёх страницах?
3) Какое количество открыток у Наташи и Веры на восьми страницах?

Задача 2.

Домашнее задание:

Задача 1. Цена 1 кг мороженой рыбы 53 р. 20 к. Хватит ли 160 р., чтобы купить 3 кг такой рыбы? Какова стоимость двух килограммов рыбы? Пятисот граммов рыбы?

Задача 2. Библиотеке нужно переплести 1200 книг. Первая мастерская может переплести это количество книг за 3 дня, а вторая – за 6 дней. За сколько дней переплетут 1200 книг обе мастерские, если будут работать вместе.