Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЛЕСОСИБИРСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал Сибирского федерального университета

Физико-математический
факультет
Высшей математики, информатики и естествознания
кафедра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

44.03.05 Педагогическое образование
44.03.05.06 Математика и информатика

МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В 10-11 КЛАССАХ

тема

Руководитель ______________ Т.Ю. Войтенко
подпись инициалы, фамилия

Выпускник ______________ Т.В. Телешун
подпись инициалы, фамилия

Лесосибирск 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЛЕСОСИБИРСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал Сибирского федерального университета

Физико-математический
факультет

Высшей математики, информатики и естествознания
кафедра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

44.03.05 Педагогическое образование
44.03.05.06 Математика и информатика

МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В 10-11 КЛАССАХ
тема

Работа защищена «22» июня 20 17 г. с оценкой «хорошо»

Председатель ГЭК ________ подпись С.С.Аплеснин инициалы, фамилия

Члены ГЭК
________ подпись Е.В. Киргизова инициалы, фамилия
________ подпись Е.Н. Яковлева инициалы, фамилия
________ подпись А.М.Гилязутдинова инициалы, фамилия
________ подпись И.А.Падалко инициалы, фамилия

Руководитель ________ подпись Т.Ю. Войтенко инициалы, фамилия

Выпускник ________ подпись Т.В.Телешун инициалы, фамилия

Лесосибирск 2017

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Методика использования систем компьютерной алгебры при изучении математики в 10-11 классах» содержит 64 страницы текстового документа, 24 иллюстрации, 2 таблицы, 39 формул, 46 использованных источников.

СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ, МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ GEOGEBRA, ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ, ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ, НЕСТАНДАРТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПОДГОТОВКА К ЕГЭ.

Цель выпускной квалификационной работы – изучить методику использования систем компьютерной алгебры при решении алгебраических и геометрических задач на уроках математики.

Для решения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Проанализировать учебно-методическую и научную литературу по теме исследования.
2. Изучить основы работы в системе GeoGebra.
3. Проанализировать методические особенности применения данной системы в учебном процессе.
4. Выделить методические рекомендации по применению GeoGebra при изучении математики.

Объект исследования: процесс обучения школьников математики с помощью системы GeoGebra при изучении математики.

Предмет исследования: применение GeoGebra в процессе обучения решению некоторых алгебраических и геометрических задач.

В результате работы были изучены и выделены методические особенности применения системы GeoGebra на уроках математики.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Компьютерные технологии завоевывают все больше доверия и симпатии школьников и учителей математики. Преподавание математики, особенно геометрии не может обойтись без наглядности. В тесной связи с наглядностью обучения находится и его практическая значимость. Ведь именно благодаря наглядности черпается конкретный материал для формирования геометрических представлений. Процесс обучения можно упростить, если разумно использовать информационные технологии в обучении.

Использование компьютера как средства обучения способствует оптимизации учебного процесса и изменению роли учителя, который теперь выступает в качестве указывающего звена в учебной деятельности. Учащиеся, в свою очередь, получают определенную самостоятельность в учебной деятельности, что создает условия для благоприятного формирования отношения к учебному процессу.

На сегодняшний день создано множество различных обучающих программ. Для повышения активности учебного процесса, повышения интереса к предмету, наглядности на уроке целесообразно использовать некоторые системы компьютерной алгебры. Использование систем компьютерной алгебры позволяет сделать процесс обучения интересным и наглядным, они развивают способность к творческой деятельности учащихся, их абстрактное и логическое мышление. Например, система GeoGebra рассчитана на поддержку школьного курса геометрии, алгебры и математического анализа.

Цель выпускной квалификационной работы – изучить методику использования систем компьютерной алгебры при решении алгебраических и геометрических задач на уроках математики.

Для решения поставленной цели были сформулированы следующие **задачи**:

1. Проанализировать учебно-методическую и научную литературу по теме исследования.
2. Изучить основы работы в системе GeoGebra.
3. Проанализировать методические особенности применения данной системы в учебном процессе.
4. Выделить методические рекомендации по применению GeoGebra при изучении математики.

Методы, используемые в работе − анализ учебно-методической литературы, сравнение, обобщение педагогического опыта по использованию систем компьютерной алгебры в школе.

Объект исследования: процесс обучения школьников математике с помощью системы GeoGebra.

Предмет исследования: применение GeoGebra в процессе обучения решению алгебраических и геометрических задач.

Актуальность работы связана с восстребованностью методики использования системы компьютерной алгебры GeoGebra на уроках математики в 10-11 классах.

Теоретическая значимость выпускной квалификационной работы заключается в раскрытии возможностей системы GeoGebra, которые могут быть использованы на уроках математики в 10-11 классах.

Практическая значимость работы заключается в исследовании особенностей использования системы GeoGebra при решении алгебраических и геометрических задач.

Структура работы: выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников.

В первой главе рассмотрены методические аспекты применения систем компьютерной алгебры при изучении математики в основной школе. В частности, приведены методические рекомендации по обучению доказательству геометрических утверждений. Во второй главе были рассмотрены примеры решения алгебраических задач (задачи с параметром, нестандартные уравнения) и геометрических задач (задачи на построение) с использованием среды GeoGebra. В заключительном параграфе указывается применение системы GeoGebra как средство подготовки учащихся к ЕГЭ.

1 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ В ОБРАЗОВАНИИ

1.1 Введение в системы компьютерной алгебры

Термин «компьютерная алгебра» появился в конце 70-х гг. XX в. как синоним терминов «аналитические и символьные вычисления на компьютере». К настоящему времени компьютерная алгебра представляет собой достаточно четко оформившуюся и бурно развивающуюся область научного знания, находящуюся на границе алгебры и информатики. Основное отличие компьютерной алгебры от традиционной вычислительной математики состоит в том, что она занимается разработкой алгоритмов, позволяющих решать математические задачи в аналитическом виде. Это означает, в частности, что решение, полученное методами компьютерной алгебры, является точным, а не приближенным [17].

Применение систем компьютерной алгебры существенно расширяет возможности автоматизации всех этапов математического моделирования. Возможны два подхода к компьютерной реализации моделей и решению задач в системах компьютерной алгебры.

Первый подход: для проведения вычислений пользователь должен освоить азы алгоритмизации, изучить один или несколько языков программирования, таких, как Бейсик, Паскаль, Фортран, СИ, а также численные методы расчётов.

Второй подход заключается в использовании готовых программ и сводится к созданию блочной компьютерной модели. Для облегчения расчетов были созданы специализированные программные комплексы для автоматизации математических и инженерно-технических расчётов: MathCad, MatLab, Mathematica, Maple, MuPAD, Derive, GeoGebra и другие. Системы компьютерной математики (СКМ) позволяют провести исследование проблемы, анализ данных, моделирование, тестирование, проверку существования решения, оптимизацию, документирование и оформление результатов, они позволяют сосредоточить основное внимание на существе проблемы, оставляя в стороне технику классической математики, детали вычислительных методов и алгоритмических процедур, нюансы языков программирования и команд операционной системы.

Заметим, что ни Derive не являются пакетами символьных вычислений в чистом виде, это пакеты численных методов. При этом распространенность пакета Derive незначительна, он существенно уступает по популярности таким пакетам численных методов как MatLab и MathCad. Хотя MathCad позволяет проводить аналитические преобразования, для этого используется встроенное ядро Maple. Возможности пакета MathCad для решения задач теории чисел комбинаторики следует охарактеризовать как недостаточные.

Пакет символьных преобразований Mathematica во многом является братом-близнецом пакета Maple. Освоивший один из этих пакетов без особого труда сможет использовать и другой.

Пакет Mathematica, по-видимому, является сегодня наиболее популярным в научных кругах, особенно среди теоретиков. Пакет предоставляет широкие возможности в проведении символьных (аналитических) преобразований, однако требует значительных ресурсов компьютера. Система команд пакета во многом напоминает какой-то язык программирования.

Пакет Maple также весьма популярен в научных кругах. Пользователи характеризуют Maple как очень надежный и устойчиво работающий пакет. Кроме аналитических преобразований пакет в состоянии решать задачи численно.

Пакет GeoGebra − это свободная (бесплатная) образовательная математическая программа, объединяющая в себе геометрию, алгебру и начала анализа. GeoGebra позволяет визуализировать математику, проводить эксперименты и исследования

Пакет Живая геометрия − программа бесплатная, позволяет не только изучать основные геометрические объекты и их свойства, но и создавать интерактивные чертежи, а также выполнять различные измерения. Кроме того, она лучше развивает понимание при формулировании теорем и последующего их доказательства [35].

1.2 Использование систем компьютерной алгебры в образовании

Массовая компьютеризация школ открывает широкие возможности для использования на уроках средств и форм обучения, базирующихся на электронных средствах обработки и передачи информации. Среди программ, разработанных для обучения в школе, хочется выделить программное обеспечение Geogebra [1]. Идея GeoGebra заключается в приобретении геометрических, алгебраических и числовых представлений в интерактивном режиме. Кроме того, GeoGebra позволяет напрямую вводить и манипулировать уравнениями и координатами, работать со слайдерами для подбора необходимых параметров, обладает богатыми возможностями работы с функциями. Созданные в программе интерактивные работы можно сохранять в виде апплетов. С её помощью можно строить графики функций, решать задачи по планиметрии и стереометрии; выполнять построения различных объектов и рассматривать их в динамике [25].

Современное представление о качественном образовании предполагает такую обязательную составляющую как владение компьютерными технологиями. А компьютерные технологии на сегодняшний день включают широкое использование систем компьютерной алгебры (СКА) или, используя другой, часто применяемый термин – «математических пакетов». Так же последнее время стал более широко использоваться термин СКМ – «системы компьютерной математики». Компьютерная алгебра часто рассматривается как область информатики, занимающаяся разработкой, анализом реализацией и использованием алгебраических алгоритмов. Системы компьютерной алгебры широко применяются как для поддержки научных исследований, так и в образовательных целях. Благодаря мощной графике, средствам визуального программирования в использованию техники мультимедиа СКА широко используются в образовании в качестве инструментальных средств.

Системы компьютерной алгебры предоставляют новые широкие возможности для совершенствования образования на всех, без исключения, его этапах от целенаправленного обучения и образования до комплексной подготовки обучаемого к профессиональной деятельности и самореализации.

Велика роль пакетов прикладных программ в образовании, в том числе, при изучении математики. Облегчая решение сложных задач, они снимают психологический барьер в изучении математики и делают этот процесс интересным и более простым. При грамотном применении их в учебном процессе пакеты обеспечивают повышение уровня фундаментальности математического образования. Математические программы дают возможность реализовать стандартными средствами важнейшие с дидактической точки зрения принципы "От простого к сложному" и "Максимальная наглядность и удобство работы". Эти принципы развивают и формируют у учащихся навыки самостоятельной познавательной деятельности, необходимые при дальнейшем обучении в вузе. Использование математических программ дает возможность учащимся применять для решения текущей образовательной задачи различные способы, схематическое описание которых можно дать следующим образом:

− стандартное решение задачи (использование программы в качестве своеобразного "сверхмощного калькулятора" для выполнения расчетов по алгоритмам, предложенным преподавателем);

− углублённое решение задачи (стандартное решение задачи, сопровождающееся самостоятельным анализом и разработкой алгоритма решения задачи);

− углубленное изучение сущности исследуемых закономерностей (углубленное решение задачи, сопровождающееся "виртуальными экспериментами").

Реализация принципа "Наглядность и удобство" в определённой мере также обеспечивается стандартными возможностями, предоставляемыми большинством математических пакетов.

При выборе того или иного программного средства для использования его в своей работе перед преподавателем неизбежно встаёт вопрос о предпочтении того или иного из них.

При отборе систем компьютерной математики для применения в учебном процессе в качестве основных можно указать следующие критерии:

– простота освоения;

– гибкий и удобный интерфейс;

– универсальность;

– полнота предлагаемых инструментов для реализации математических методов с учетом объема и тематики курса;

– богатые графические возможности для визуализации промежуточных и окончательных этапов решения задачи;

– наличие встроенной информационно-поисковой системы;

– доступность пакета для студентов вне учебных компьютерных классов.

В случае использования систем компьютерной алгебры для изучения математики преподаватель должен готов ответить на такие вопросы, а именно: могут ли системы компьютерной алгебры помочь студентам, ученикам лучше понять математику, могут ли механизмы вычисления, представляемые системой компьютерной алгебры, затушевывать математическое понимание предмета, будет ли использование СКА ослаблять способность студента вычислять вручную, улучшит ли применение систем компьютерной алгебры обучение математике? В том случае, когда система компьютерной алгебры рассматривается как система программирования, с развитым входным языком, организация которой предполагает использование сложных структур данных и реализацию современных алгебраических алгоритмов, ее изучение стимулирует учащегося к овладению новыми подходами и алгоритмами, позволяет повысить его профессионализм. Разработка современных СКА, также сильно стимулировала и стимулирует появления новых, чисто теоретических, алгебраических результатов [20].

Это подтверждает и слова заслуженного учителя России В.И.Рыжика: «…Громадное значение для развития важнейшего параметра математического мышления-пространственного мышления – имеет динамическая картина, возникающая на дисплее…Коль скоро математику можно считать наукой экспериментальной или использующей компьютерное экспериментирование как таковое…вполне естественно внедрять его в арсенал дидактических средств. Компьютер многократно увеличивает возможности и роль математического эксперимента».

1.3 Методические рекомендации по проведению урока с компьютерной поддержкой

Особенностью урока с компьютерной поддержкой является то, что кроме обычных целей урока, урок с компьютерной поддержкой имеет технологическую цель: обучение новому методу учебной деятельности, использованию конкретной учебной программы.

На таких уроках кроме видов наглядности, применяемых на мультимедийных занятиях, с помощью СКА можно подготовить и использовать:

- динамические исследовательские модели для проведения геометрических открытий, численных экспериментов, исследования заданных математических ситуаций (пограничных и крайних ситуаций, геометрических мест точек и др.);
- динамические модели условий задач

– с использованием динамического моделирования реальных объектов;

– на построение циркулем и линейкой с возможностью экспериментального исследования границ существования решений;

– с ограниченным набором инструментов и доступам к объектам;

- сценарные динамические модели изучения понятий, теорем, решения задач с использованием динамического текста для организации

- пошаговых рассуждений;

- визуальных подсказок, указаний;

- тестовые задания.

К методическим рекомендациям по проведению уроков с компьютерной поддержкой можно отнести следующее:

- Необходимо разработать подробный план урока, сформулировать вопросы и задания к компьютерным демонстрациям, моделям, продумать конкурсы на лучшую модель, чертеж к задаче.
- Первоначально использовать программу (интерактивную геометрическую среду) в демонстрационном, фронтальном варианте.
- Урок лучше начинать с фрагмента длительностью не более 10-15 минут, на котором нужно ознакомить учащихся со структурой урока и последовательностью выполнения заданий, раздать учащимся заранее распечатанные вопросы и задания к моделям на готовых бланках, в которые должны вноситься ответы и результаты работы.
- Основную часть урока необходимо отводить на самостоятельную работу учащихся за компьютером. Ученики могут работать в индивидуальном режиме, в парах или по очереди.
- Желательным является оформление в конце урока небольшого отчёта с осмыслением выполненной работы, а при оценке групповой работы – проведение опроса с указанием вклада каждого из членов группы в общую работу для определения коэффициента индивидуального участия. Компьютерные уроки без подведения итогов менее эффективны.

- На уроках можно выделять учащимся некоторое время на незапланированные виды работы: пусть они познакомятся даже с не относящимися к теме урока моделями, с неизученными инструментами СКА, так как на первых порах им всё интересно, иначе они будут делать это украдкой. Пусть ребята подробнее познакомятся с системой, освоят интерфейс программы и уверенность работы с ней. Это сэкономит время на последующих уроках.
- В конце урока учащимся быстрее всех справившимся с основными заданиями можно предложить творческие задания на самостоятельное придумывание задачи, проведение компьютерных экспериментов для выдвижения гипотезы с последующим ее обоснованием.
- При проведении урока в компьютерном классе недопустима фронтальная работа с учащимися, сидящими за компьютером, на протяжении всего урока, также не следует пытаться синхронизовать работу детей, постоянно прерывать их работу и сообщать, какие действия им следует предпринимать далее.
- При правильно подготовленном уроке каждый ученик (группа) выполняет своё персональное задание в своём, индивидуальном темпе.

При работе с компьютером умения, полученные учащимися в геометрических построениях с помощью СКА необходимо закрепить реальными построениями, иначе настоящие навыки не разовьются.

Злоупотреблять компьютерной поддержкой, равно как и любым другим одним методом работы, нельзя: так как работа в компьютерном классе с программой, в том числе и интерактивной геометрической средой, несёт некоторую условность, учитель должен убедиться в том, что материал понят правильно, и что учащиеся воспринимают изученное отдельно от компьютера. Это может быть проверено на последующих уроках этой темы без использования компьютера.

Слишком частое проведение уроков с использованием компьютеров может отрицательно сказаться на результатах обучения: в сознании ребенка геометрический объект или теорема могут прочно ассоциироваться с кнопками и готовыми чертежами. Большее разнообразие учебных ситуаций и гибкое оперирование образами достигается на традиционных уроках с помощью карандаша и линейки, самостоятельными построениями и переосмыслением изученного [23].

В отличие от привычных уроков, на которых ритм работы учеников задаётся и строго контролируется учителем, в компьютерном классе работа учащихся осуществляется за каждой машиной в своём темпе. Поэтому общая последовательность работы должна быть хорошо известна учащимся до урока.

После того, как ученики окажутся перед экранами компьютеров, общаться с ними будет возможно только индивидуально. На первых уроках желательно присутствие, хотя бы в течение первых 10-15 минут, учителя информатики, инженера-программиста или коллеги, знакомого со спецификой компьютерного класса. Практика показывает, что в классе могут возникать неполадки, даже если накануне вы всё проверили и убедились в полной исправности оборудования и работоспособности программного обеспечения.

При построении урока необходимо учитывать:

- уровень подготовки класса;
- насколько учащиеся владеют общими навыками работы с компьютером и начальными знаниями с программой;
- численность учебной группы (класса) и численность компьютеров в учебном кабинете;
- допустимую продолжительность работы учащихся за компьютерами.

Урок с компьютерной поддержкой имеет следующие преимущества перед традиционным уроком:

• сокращается время при выработке технических навыков учащихся;

• увеличивается количество тренировочных заданий;

• достигается оптимальный темп работы ученика;

• легко достигается уровневая дифференциация обучения;

• учащийся становится субъектом обучения, так как программа требует от него активного управления;

• в учебную деятельность входит компьютерное моделирование;

• обучение можно обеспечить материалами из удаленных баз данных, пользуясь средствами телекоммуникаций;

• диалог с программой приобретает характер учебной игры, и у большинства детей повышается мотивация учебной деятельности;

• для интеллектуально одарённых детей работа с компьютерными программами является более значащей, чем при традиционной форме обучения в виду их коммуникативной замкнутости.

Основными дидактическими частями компьютерного урока являются: организационная часть; актуализация зон актуального и ближайшего развития; изучение нового материала; закрепление материала — повторение и применение; контроль усвоения; коррекция; обобщение; домашнее задание. Все дидактические части урока могут быть компьютеризированы полностью или частично.

Организационная часть. На данном этапе для эффективности урока необходимо:

• ознакомить учащихся со структурой компьютерного урока и последовательностью выполнения заданий;

• раздать учащимся вопросы и задания к компьютерным заданиям;

• разбить учащихся на группы для работы за компьютером.

Актуализация зон актуального и ближайшего развития чаще проходит в виде беседы с учащимися. Вопросы к ней целесообразно визуализировать на слайдах в виде небольшого видеоряда с использованием чертежейиллюстраций, анимаций, видеороликов, интерактивных моделей, которые могут быть взяты из предыдущих уроков.

Изучение нового материала. Учитель не отменяется, он координирует и организовывает учебный процесс. Привычную чёрную доску заменяет проекционный экран или экран монитора. Богатство содержательной поддержки с помощью видеоряда, звука и текста делает урок не только значительно более усваиваемым, но и неизмеримо более увлекательным. Взаимодействие осуществляется одновременно по всем каналам восприятия «текст — звук — видео — цвет».

Первоначальное ознакомление с новым материалом может происходить как фронтально, так и индивидуально. Индивидуальное общение с компьютером имеет то преимущество, что оно интерактивно (диалог, лекция-беседа, тренинг, тест, проблематизация, гипертекст, гипермедиа).

На большом экране можно:

- показать образец решения или оформления задачи,
- продемонстрировать этапы доказательства теоремы,
- проиллюстрировать практическое применение теорем.

Не целесообразно проецировать на большой экран определение понятия, формулировку теоремы в виде текста, условие задачи из учебника, вопросы теста.

Закрепление. Основной недостаток классического традиционного урока — трудность учёта индивидуальных особенностей усвоения материала учащимися (гендерные различия, индивидуализация трудности материала, темпа усвоения, типологических особенностей личности ребёнка). Применение компьютера позволяет:

- применить индивидуальное программирование, разветвлённую программу закрепления;
- организовать внутри классную групповую дифференциацию;

• разработать задания для учащихся с учётом их индивидуальных особенностей (уровня подготовленности, доминирующего канала восприятия, типа мышления и т.д.).

При этом структура урока становится нелинейной. Каждая группа работает по своему варианту и своей программе.

Компьютер с дистанционной системой опроса позволяет провести экспресс-диагностику усвоения и в зависимости от её результатов соответствующую коррекцию.

Повторение. В компьютерном варианте повторение может быть представлено в разных форматах: текст, звук, изображение. Это может быть репродуктивное тестирование, экспериментальные задачи, проблемные ситуации, развивающие игры и т.д. Таким образом, все учащиеся оказываются включены в мыслительную деятельность, готовы к восприятию нового. Они могут самостоятельно ставить цели, искать решения поставленной задачи, творчески работать, выводить формулы.

При обобщающем повторении для обобщения и систематизации знаний используются графические возможности компьютера, а для достижения гарантированных результатов обучения — программы-тренажёры.

Контроль знаний. Компьютерный контроль знаний по сравнению с традиционным имеет существенные преимущества: учитывается разная скорость работы учащихся, задания дифференцируются по степени трудности; повышается объективность оценки; ученик видит детальную картину собственных недоработок; оценка может выдаваться (причём быстро) не только по окончании работы, но и после каждого вопроса.

Компьютер помогает педагогу в управлении учебным процессом, выдаёт результаты выполнения учащимися контрольных заданий с учётом допущенных в теме ошибок и затраченного времени; сравнивает показатели различных учащихся по решению одних и тех же задач.

Компьютерный контроль знаний по сравнению с традиционным имеет существенные преимущества: учитывается разная скорость работы ученика, задания дифференцируется по степени трудности; повышается объективность оценки; ученик видит детальную собственных недоработок; оценка может выдаваться (причем быстро) не только по окончании работы, но и после каждого вопроса.

Домашнее задание. Электронным домашним заданием, выполненным на компьютере могут быть:

- индивидуальные задания,
- чертежи, созданные в СКА,
- электронная презентация.

Электронное домашнее задание может быть индивидуальным, групповым, ориентировано на разные группы учащихся. При этом необходимо указывать:

- программу реализации задания,
- объём отчетного документа (количество страниц, слайдов, динамических чертежей),
- дополнительное задание.

1.4 Обучение доказательству с использованием системы GeoGebra

Обучение доказательству геометрических утверждений является одной из главных целей школьного курса геометрии. Её достижение обеспечивается включением в содержание школьных учебников образцов доказательства геометрических теорем, задач на доказательство задач на доказательство, а также предъявлением требованию к обоснованию ключевых моментов решения задач на вычисление и построение.

Традиционно обучение доказательству связывается с формированием умений подтверждать истинность утверждений и правильность принимаемых решений логическими выводами дедуктивного характера. Эта традиция восходит к периоду развития математики, когда только рассуждения, опирающиеся на правила логического вывода, считались убедительными и строгими. Сегодня отношение математиков к логическому доказательству постепенно меняется под влиянием компьютерной техники [24]. Они всерьез задумываются над той ролью, которую играет в доказательстве теорем компьютерный эксперимент, проводимый по схеме полной индукции («компьютерное доказательство»).

Использование возможностей «компьютерного доказательства», на наш взгляд, позволит снять многие трудности, которые испытывают учащиеся на первых этапах обучения доказательству, сделать переход к новой форме познания более «безболезненным». Предлагаем рассматривать этапные цели обучения доказательству с точки зрения трех основных уровней.

- **Эмпирический уровень** (достигается к концу изучения первых тем систематического курса 7 класса) − умение обосновывать истинность геометрических утверждений с помощью полного компьютерного эксперимента («компьютерного доказательства») на готовых (или самостоятельно построенных) динамических чертежах.
- **Технологический уровень** (достигается к концу 7 класса) − умение осуществлять логический контроль корректности отражения условия теоремы (задачи) динамическим чертежом и корректности использования самого чертежа при проведении «компьютерного доказательства».
- **Абстрактно-теоретический уровень** (достигается к концу 9 класса) − умение проводить логические доказательства геометрических утверждений с целью логического объяснения результатов компьютерного эксперимента. Рассмотрим методические условия, которые обеспечат достижение представленных выше целей. Достижение эмпирического уровня сформированности умений доказывать осуществляется с опорой на субъектный опыт учащихся, связанный с подтверждением истинности утверждений ссылкой на их очевидность (возможность подтверждения результатами наблюдения) или практическую проверяемость (возможность подтверждения опытом и экспериментом).

Этот этап обучения должен быть направлен на решение трех образовательных задач:

- обучение выделению условий проведения эксперимента и его целей;
- обучение планомерности и полноте перебора вариантов в ходе эксперимента;
- обучение оформлению отчетов о проведенном эксперименте, включающих описание его условий, цели, хода и результатов.

Необходимость решения этих образовательных задач определена тем, что соответствующих им знаний и умений нет в содержании субъектного опыта большинства учащихся.

Методика обучения доказательству на данном этапе опирается на схему интеграции субъектного опыта с социальным, которая предложена И.С. Якиманской [28]: 1) актуализация субъектного опыта учащихся, отнесенного к изучаемому вопросу; 2) раскрытие содержания субъектного опыта учащихся; 3) «окультуривание» содержания субъектного опыта учащихся через его сопоставление с социокультурным образцом и переосмысление; 4) формирование нового субъектного опыта учащихся.

Деятельностную основу реализации этой методической схемы составляет деятельность планирования, проведения и описания компьютерных экспериментов с постепенным повышением степени самостоятельности учащихся.

Рассмотрим примерный вариант методики работы с задачами на доказательство и теоремами для достижения намеченных результатов на примере работы с теоремой о сумме смежных углов.

Постановка задачи на доказательство данной теоремы может быть продолжением разговора о связи величин смежных углов [18]. Мотивом может выступать необходимость объяснения выявленной в ходе выполнения упражнения в зависимости величин смежных углов.

1. **Актуализация субъектного опыта учащихся, связанного с аргументированием утверждений (как мотивация проведения компьютерного доказательства).**

Работа с теоремой должна начинаться с формирования потребности учащихся подтвердить свое мнение о справедливости «очевидного» с их точки зрения утверждения компьютерным экспериментом. Мотив может быть внешним − интерес к работе с компьютером. Для его использования учащимся дается творческое задание − придумать способ наглядной демонстрации справедливости данного утверждения в СКА. Результатом выполнения этого задания с опорой на субъективные представления учащихся о «наглядной убедительности» и знания о возможностях СКА будут различные варианты компьютерных чертежей. На рис. 1 представлены варианты иллюстрации утверждения о равенстве суммы смежных углов 180°, предложенные учащимися.

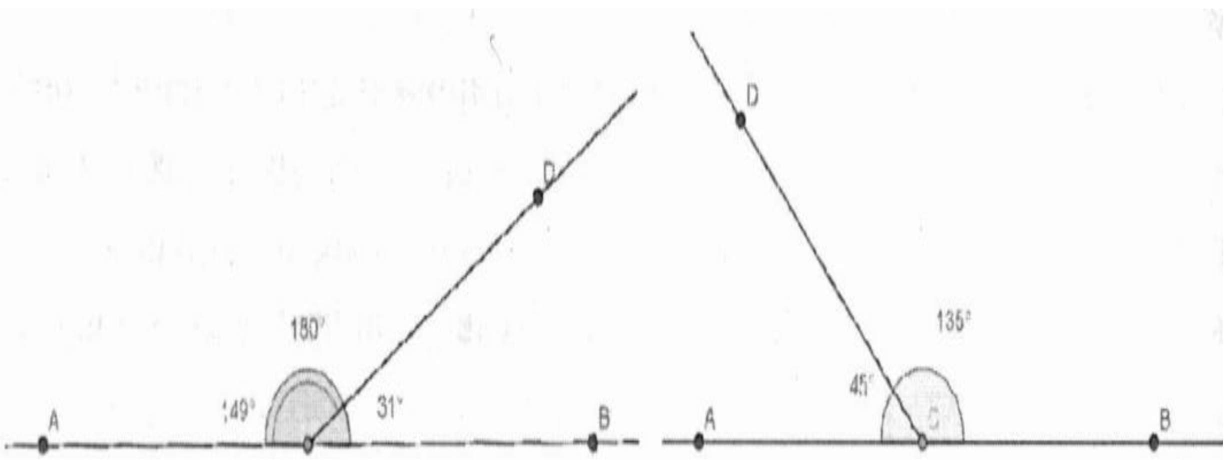

Рис. 1. Варианты иллюстрации утверждения о равенстве суммы смежных углов 180^{0}.

2. **Раскрытие содержание субъектного опыта учащихся (как выявление значимых условий и цели проведения «компьютерного доказательства»).**

Данный этап работы по своему содержанию сходен с работой по анализу формулировки теоремы (задачи) с целью выделения условия и заключения теоремы (данных и требования задачи). Однако объектом анализа здесь будет уже не сама формулировка, а ее изображение − иллюстративный материал предложенный учащимися. Отражением значимых условий проведения эксперимента признаются шаги построения чертежа, которые обеспечивают сохранение отношения «смежности» построенных углов при любых случайных или намеренных изменениях чертежа. Наглядным выражением цели эксперимента являются дополнительные записи, которые делают «видимым» доказываемый факт.

3. **Окультуривание опыта (как планирование хода «компьютерного доказательства»).**

Планирование хода компьютерного доказательства (особенно если оно проводится впервые) имеет смысл предварить рассказом о традициях представления доказательств в Древней Индии, связанных с наглядным представлением не столько самого доказываемого факта, сколько универсальных практических действий с геометрическими объектами, которые сводят его к утверждению, истинность которого не подвергается сомнению (рис.2).

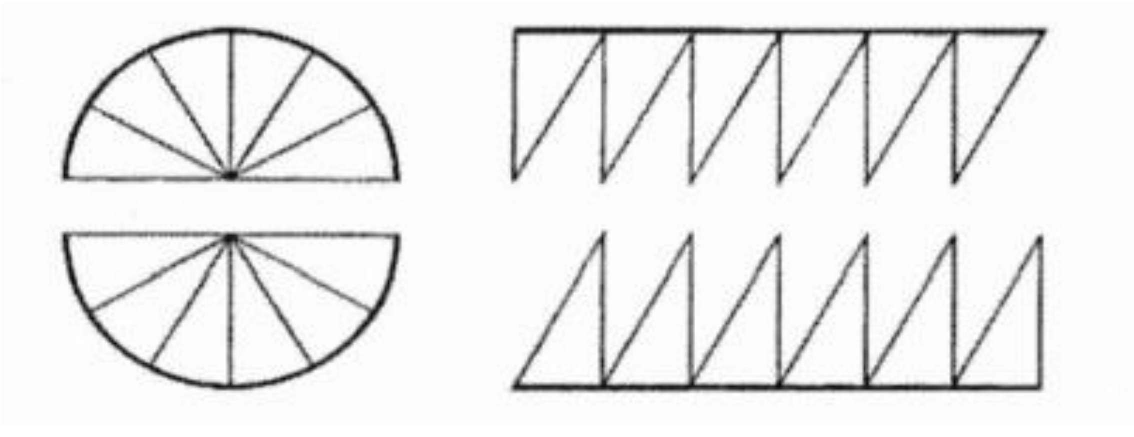

Рис. 2. Представления доказательств в Древней Индии

Эти сведения смогут явиться отправной точкой включения учащихся в деятельность оценки предложенных ими чертежей. Например, перед учащимися может быть поставлено задание выбрать из всех предложенных ими динамических чертежей, те которые могут быть использованы для демонстрации динамической устойчивости иллюстрируемого утверждения, описать план действий с чертежом для такой демонстрации?

Результатом выполнения подобных заданий является установление и обсуждение наиболее типичных ошибок, совершаемых учащимися при построении чертежа. Такими ошибками являются статичность предложенных чертежей или их неконтролируемая динамичность.

Для установления контроля над динамичностью чертежа учитель может предложить учащимся воспользоваться инструментом «ползунок» (при обучении с использованием GeoGebra).

Проблема введения «ползунка», которую ставит этим предложением перед учащимися учитель, является проблемой параметризации условия теоремы − дополнения его параметром − указанием на количественное свойство объектов, оговоренных условием теоремы, вне зависимости от значения которых должно выполняться ее заключение.

В рассматриваемом примере такое свойство является очевидным и единственным − величина одного из смежных углов. После введения параметра формулировка теоремы примет следующий вид: «Сумма смежных углов равна 180° вне зависимости от конкретных значений этих углов». Заметим, что чаще выбор такого свойства является не столь однозначным. Если таких свойств несколько, то нужно принимать решение о том, какие из них будем считать параметрами, а какие переменными с фиксированным значением. Кроме того, возникает вопрос относительно каждого параметра в отдельности или из соотношения будет исследоваться устойчивость заключения теоремы. Это уже вопрос о планировании эксперимента. К необходимости планирования эксперимента учащихся приводит и необходимость указания при задании ползунка наименьшего и наибольшего значения параметра, определения шага перебора его допустимых значений. В рассматриваемом примере интервал обследуемых значений параметра задается аксиомой измерения углов: от 0° до 180° (рис. 3).

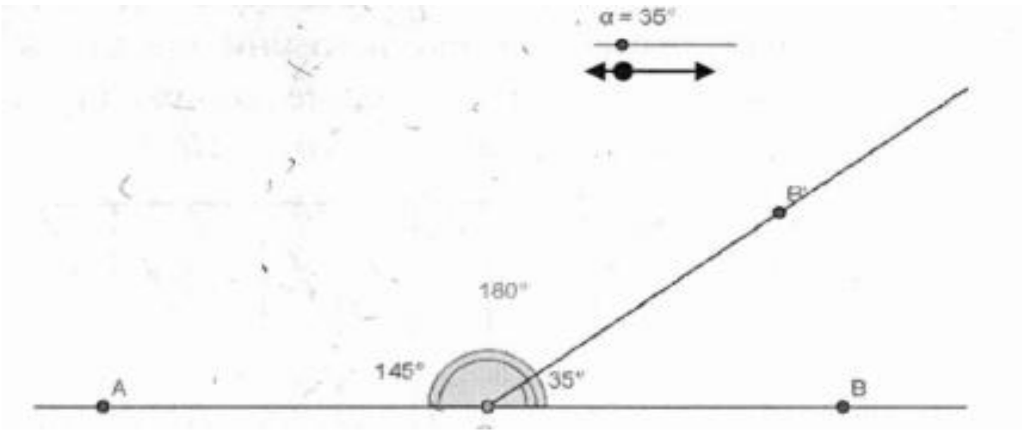

Рис. 3. Чертеж задачи в системе GeoGebra

4. **Формирование нового опыта (как описание условия, хода и результатов компьютерного доказательства).**

Первые представления о правилах оформления отчетов об экспериментах учащиеся получают на уроках физики в 7 классе при выполнении лабораторных работ. Перенос правила описания физического эксперимента на случай компьютерного эксперимента по геометрии задает следующий образец оформления компьютерного доказательства.

Задача 1. Дано: ∠BCB' и ∠B'CA − смежные углы

Доказать: ∠BCB' + ∠B'CA = 180°

Обоснование (методом компьютерного эксперимента).

Цель эксперимента − проверка независимости суммы ∠BCB'+∠B'CA от величин самих углов.

I. **Построения динамического чертежа (рис. 4):**

1. Построить прямую AB.
2. На прямой между точками A и B отметить точку C.
3. Задать параметр a – величину угла, изменяющуюся от 0° до 180°.
4. Построить ∠BCB' величины a.
5. Задать отображение величин углов ∠BCB', ∠B'CA и их сумму на экране.

II. **Ход эксперимента:**

Задаем изменение величины угла a от 0° к 180° с постепенно уменьшающимся шагом 1°; 0,1°; 0,01°; 0,001° и т.д.

Следим за изменением/сохранением суммы ∠BCB'+∠B'CA.

III. **Вывод**. Сумма ∠BCB'+∠B'CA при всех изменениях остается равной 180°.

Эмпирический уровень сформированности умений доказывать является достаточным для начала работы по формированию представлений учащихся о различиях между теоремами – свойствами, теоремами – признаками, теоремами – критериями. Для этого должна быть организована деятельность учащихся по выделению системы значимых условий проведения компьютерного эксперимента для обоснования взаимно-обратных утверждений

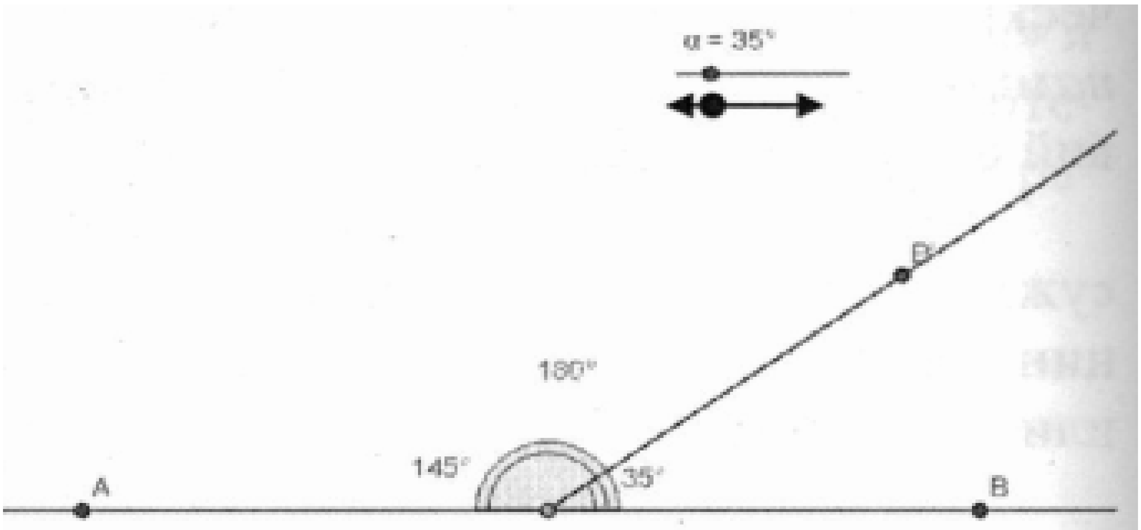

Рис. 4 Доказательство смежных углов с применением системы GeoGebra

Задача 2. Построение динамических чертежей для компьютерного доказательства утверждений: «Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны» и «Если при пересечении двух прямых секу- щей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны».

1. Дано: allb, секущая e.

∠F и ∠ E − внутренние накрест лежащие углы.

Доказать: ∠F = ∠E

Доказательство (компьютерное)

Построение динамического чертежа (рис. 5**)**

1. Построить прямую a.

2. Отметить точку E не лежащую на a.

3. Провести прямую bIIa через E.

4. Задать параметр a − угол наклона секущей e к прямой b со множеством значений 0° до 90°.

5. Провести прямую e через точку E под углом a.

6. Отметить внутренние накрест лежащие углы ∠F и ∠E.

2. Дано: прямые a и d и секущая e, ∠F= ∠C − внутренние накрест лежащие.

Доказать: aIId

Доказательство (компьютерное)

Построение динамического чертежа

1. Построить прямую a.

2. Задать параметр a − угол наклона прямой e к a со множеством значений от 0° до 90°.

3. Отметить точку F на прямой a.

4. Построить прямую e под углом a к прямой a с вершиной в точке C.

5. Отметить на прямой e точку C.

6. Построить прямую d под углом a к прямой a с вершиной в точке C и накрест лежащим к ранее построенному углу.

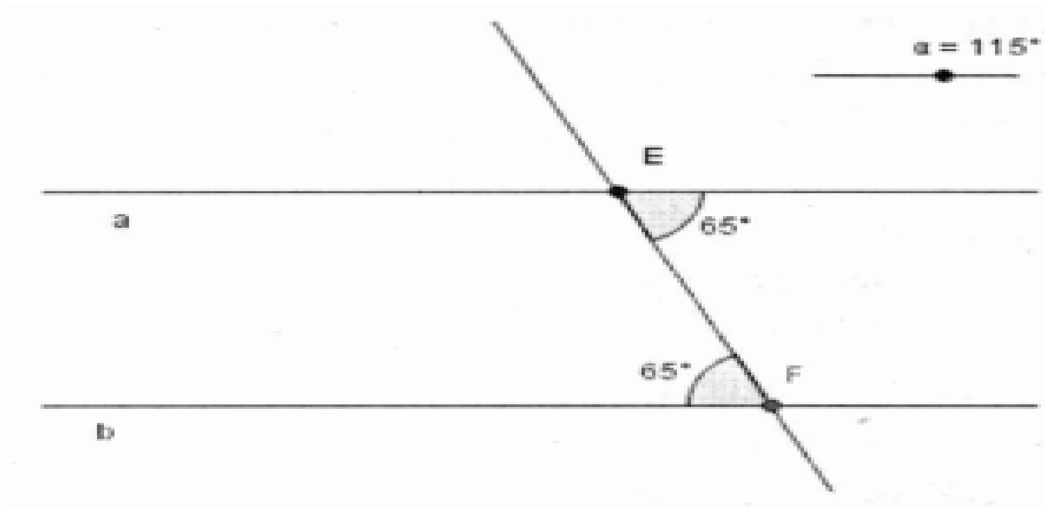

Рис. 5. Построение чертежа в GeoGebra

Достижение технологического уровня сформированности умений доказывать характеризуется приобретением умений осуществлять теоретический контроль корректности построения и использования динамического чертежа при поведении компьютерных доказательств. Подобные умений учащиеся приобретают при изучении курса «Информатика и вычислительная техника» в результате обучения обоснованию компьютерных программ. Обоснование компьютерной программы представляет собой снабжение ее дополнительной информацией, объясняющей логическое строение программы, облегчающей проверку ее корректности. Таким образом, обучение доказательству на этом уровне согласуется с методической схемой обучения обоснованию компьютерных программ, которая реализуется в курсе информатики и вычислительной техники:

1. Мотивация дополнения программы обоснованием.

2. Ознакомление со способами обоснования программ.

3. Обучение обоснованию и использованию обоснований для проверки корректности программ.

Обоснование алгоритма построения динамического чертежа, создаваемого для проведения компьютерных доказательств геометрических утверждений, должно обеспечить предотвращение следующих ошибок:

– ограниченность динамического чертежа (невозможность «просмотра» на нем всех геометрических объектов) определенного условием задачи или теоремы;

– динамическая неустойчивость (изменчивость) свойств, оговоренных условием задачи или теоремы;

– неоднозначность исполнения команд алгоритма.

Теоретической основой обоснования алгоритма построения динамического чертежа являются аксиомы, определения и признаки геометрических понятий, фигурирующих в условии теоремы (задачи).

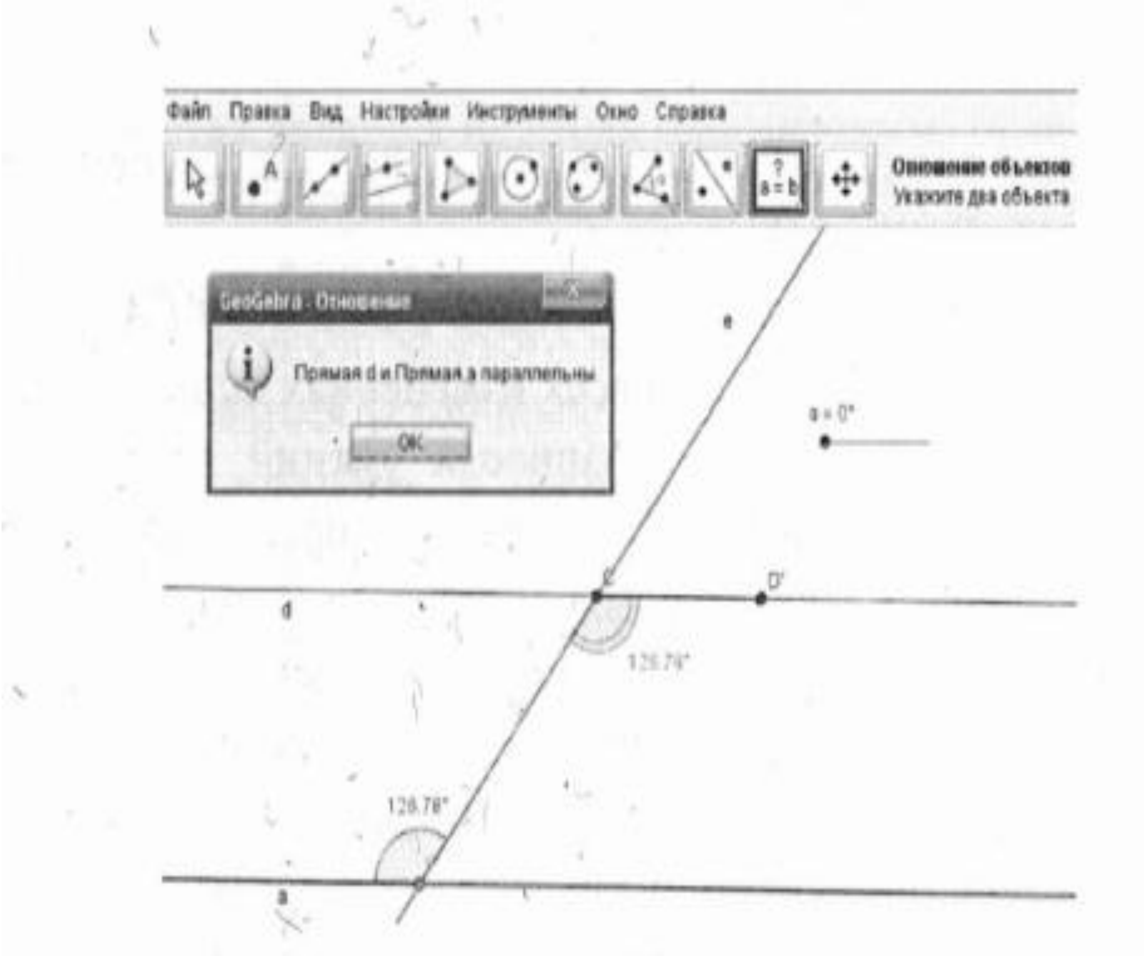

Рис. 6. Визуализация полученного решения задачи

Таким образом, в главе 1 рассмотрены методические аспекты применения систем компьютерной алгебры при изучении математики в основной школе. В частности приведены методические рекомендации по обучению доказательству геометрических утверждений.

2 РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ GEOGEBRA

2.1 Основы работы в системе GeoGebra

GeoGebra – это свободная образовательная математическая программа, соединяющая в себе геометрию, алгебру и математические исчисления.

Программа была написана Маркусом Хохенвартером с использованием языка Java. Переведена на много языков и в настоящее время активно совершенствуется и обновляется. Последняя доступная версия GeoGebra – 5.0.295.0, которую можно скачать на официальном сайте [1].

К преимуществам системы GeoGebra можно отнести:

1) динамичность программы;

2) простой и понятный пользовательский интерфейс;

3) доступность на многих языках для миллионов пользователей по всему миру, включая поддержку русского языка;

4) возможность установки программы на множества устройств: компьютеры, планшеты, телефоны с поддержкой iOS, Android, Windows Phone;

5) возможность делиться с другими пользователями моделями и разработками, а также знакомиться с другими работами на сайте GeoGebra;

6) абсолютно бесплатное программное обеспечение, являющееся прекрасным аналогом платному;

7) поддержка апплетов.

При запуске GeoGebra открывается окно программы, представленное на рис. 7.

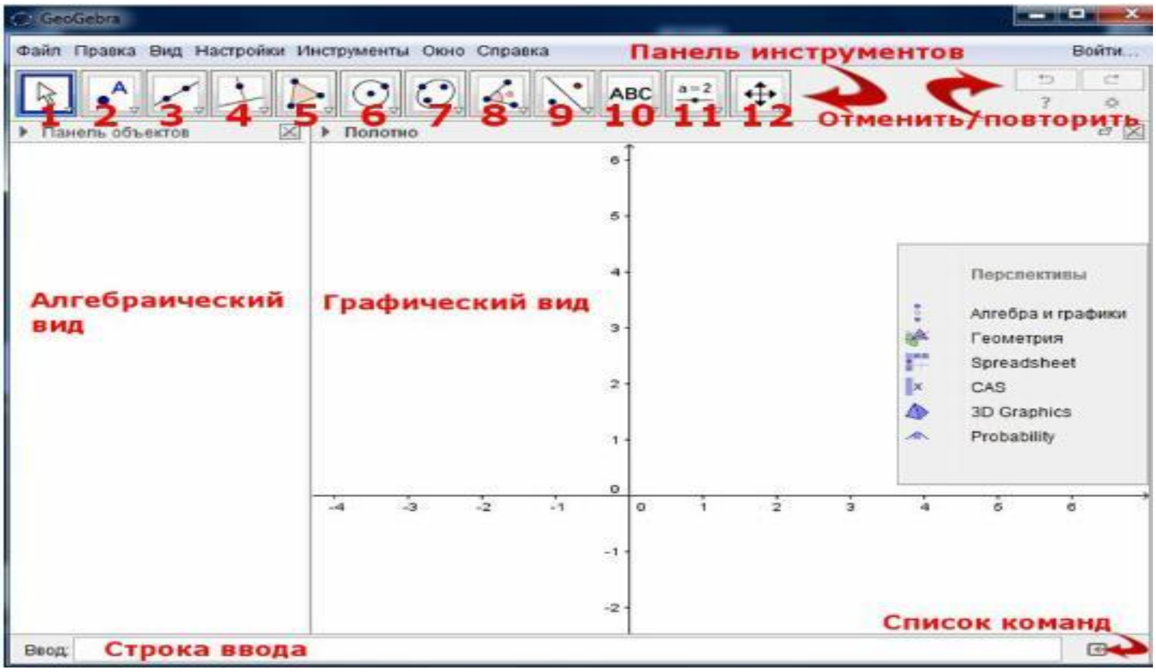

Рис. 7. Окно программы GeoGebra

Рассмотрим интерфейс окна GeoGebra. Пользовательский интерфейс GeoGebra гибкий и может быть адаптирован к работе даже со школьниками.

Главное меню – основное меню окна, как и во многих приложениях, выполняет все основные функции программы. В данной программе содержит: Файл, Правка, Вид, Настройки, Инструменты, Окно, Справка. В разделе справка имеется руководство по использованию инструментов и перспектив, правда только в англоязычном варианте.

Панель инструментов – на этой панели расположены все основные инструменты, которые позволяют выполнять построения при помощи мыши. Достаточно выбрать интересующий вас объект и нажать на графическое представление.

Отменить/Повторить – две кнопки, левая позволяет отменить последние действия, правая повторить отменённое действие.

Область графического представления – основная область, в которой будут выполняться все построения.

Панель объектов (Область алгебры) – область в которой будут записаны все математические формулы, описывающие построенные объекты.

В GeoGebra геометрия и алгебра работают очень тесно друг с другом.

Строка ввода – данная область позволяет вводить различные формулы, функции, уравнения, которые сразу отобразятся в панели объектов и в графическом представлении.

Помощь по строке ввода – позволяет просмотреть весь список команд для строки ввода.

Область перспективы – позволяет выбрать необходимую область для построения. GeoGebra обладает богатым набором инструментов. Рассмотрим каждую из групп инструментов.

Первая группа – движение, группа инструментов позволяет изменять положение или отслеживать движение объектов. В данную группу входит: перемещать; движение относительно точки.

Вторая группа – точки, является основной группой элементов любого построения на плоскости. В данную группу входят: точка; точка на объекте; прикрепить/снять точку; пересечение двух объектов; середина или центр; комплексное число; экстремумы и корни.

Третья группа – прямые линии. В данную группу входят: прямая; отрезок; отрезок с фиксированной длинной; луч; ломаная; вектор; отложить вектор.

Четвёртая группа – специальные линии, куда входят: перпендикулярная прямая; параллельная прямая; срединный перпендикуляр; биссектриса угла; касательная; поляра и диаметр; аппроксимация; локус.

Пятая группа – многоугольники, куда входят инструменты: многоугольник; правильный многоугольник; жёсткий многоугольник; векторный многоугольник.

Шестая группа – окружности и дуги, с инструментами: окружность по центру и точке; окружность по центру и радиусу; циркуль; окружность по трём точкам; полуокружность по двум точкам; дуга по центру и двум точкам; дуга по трём точкам; сектор по центру и двум точкам; сектор по трём точкам.

Седьмая группа – конические сечения, такие как: эллипс; гипербола; парабола; коника по пяти точкам.

Восьмая группа – измерения, обладающая инструментами: угол; угол заданной величины; расстояние или длина; площадь; наклон прямой; создать список.

Девятая группа – преобразования, в которую входят: отражение относительно прямой; отражение относительно точки; отражение относительно окружности; поворот вокруг точки; параллельный перенос по вектору; гомотетия относительно точки.

Десятая группа – специальные объекты: надпись; вставить изображение; карандаш; фигура от руки; отношения объектов; исследователь функций.

Одиннадцатая группа – действия над объектами: ползунок; флажок отображения/скрытия объектов; кнопка; окно ввода.

Двенадцатая группа – общие: переместить чертёж; увеличить; уменьшить; показать/скрыть объект; показать/скрыть обозначения; копировать стиль; удалить объект.

Опишем основы работы в программе GeoGebra. Для того чтобы работать с инструментами в GeoGebra, необходимо активировать инструмент, нажав на кнопку с соответствующей иконкой сверху экрана и выбрать необходимый инструмент из этой панели инструментов.

Для того чтобы сохранить файл необходимо:

1. Открыть меню («Файл − Сохранить»).

2. В появившемся окне выбрать папку, куда следует сохранить файл.

3. Ввести имя для вашего файла и нажать на кнопку «Сохранить».

Далее программа создает файл, имеющий расширение <.ggb>. Это расширение указывает, что это файл GeoGebra и, что он может быть открыт только с помощью программы GeoGebra.

Если необходимо открыть уже имеющийся файл, следует:

1. Открыть меню («Файл − Новое окно»). Если данный шаг пропустить, то программа закроет активное окно и отправит запрос на сохранение существующего файла, чтобы не потерять данные.

2. Открыть уже существующий файл GeoGebra, меню («Файл – Открыть»).

3. Перейти по структуре папок в появившемся окне и выбрать файл GeoGebra (с расширением <.ggb>) и нажать кнопку "Открыть".

Используя инструменты, находящиеся в области «Панели инструментов» можно строить различные точки, чертежи, фигуры и т.д. Одновременно с добавлением которых на полотно, соответствующие координаты появятся в «Панели объектов». «Строка ввода» служит для непосредственного ввода построений за счёт координат, уравнений, команд, функций.

GeoGebra предоставляет много возможностей для работы в различных областях. Для этого необходимо нажать левой кнопкой мыши в область перспектив, или же перезапустить приложение, для открытия окна перспектив.

При выборе перспектив в соответствии с их порядком сверху вниз открывается ниже представленные рабочие области.

1. «Алгебра и графики», представленная на рис.10.

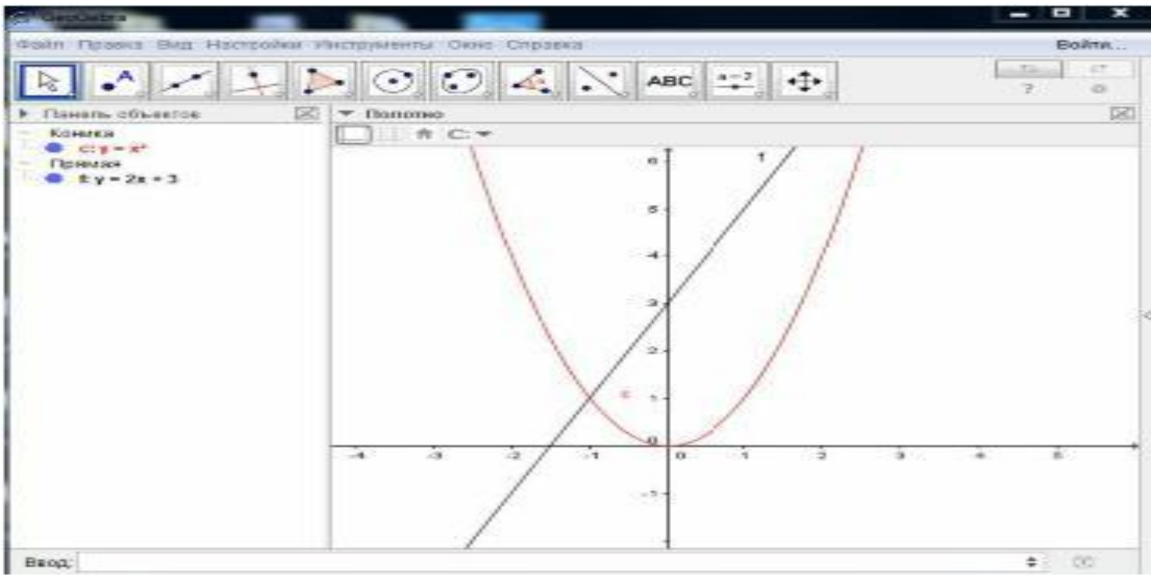

Рис. 10. Рабочее окно перспективы «Алгебра и графики»

Настраивает программу под алгебраическую среду работы. Оставляет оси абсцисс и ординат, которые по желанию можно скрыть. Данная перспектива позволяет строить графики различных функций заданных: параметрически, явно, неявно и т. п.

2. «Геометрия», представленная на рис.11.

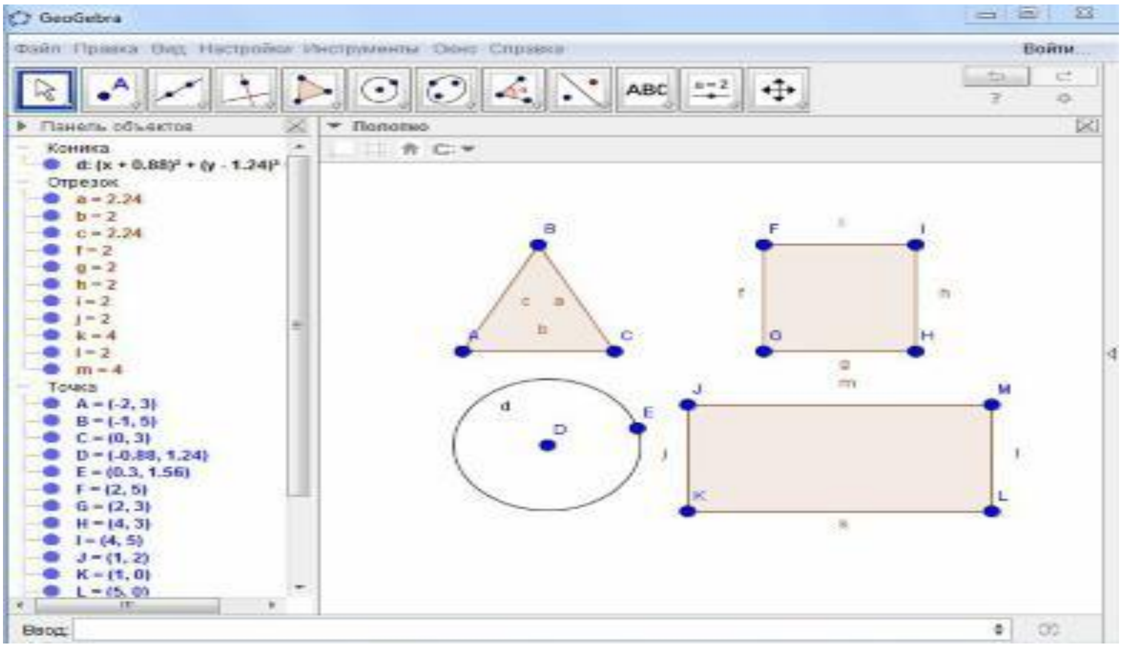

Рис. 11. Рабочее окно перспективы «Геометрия»

Скрывает оси абсцисс и ординат. Настраивает рабочую область под

перспективу геометрии и рассчитана для построения геометрических фигур: параллелограммов, треугольников, многоугольников и т. д.

3. «Spreadsheet», представленная на рис.12.

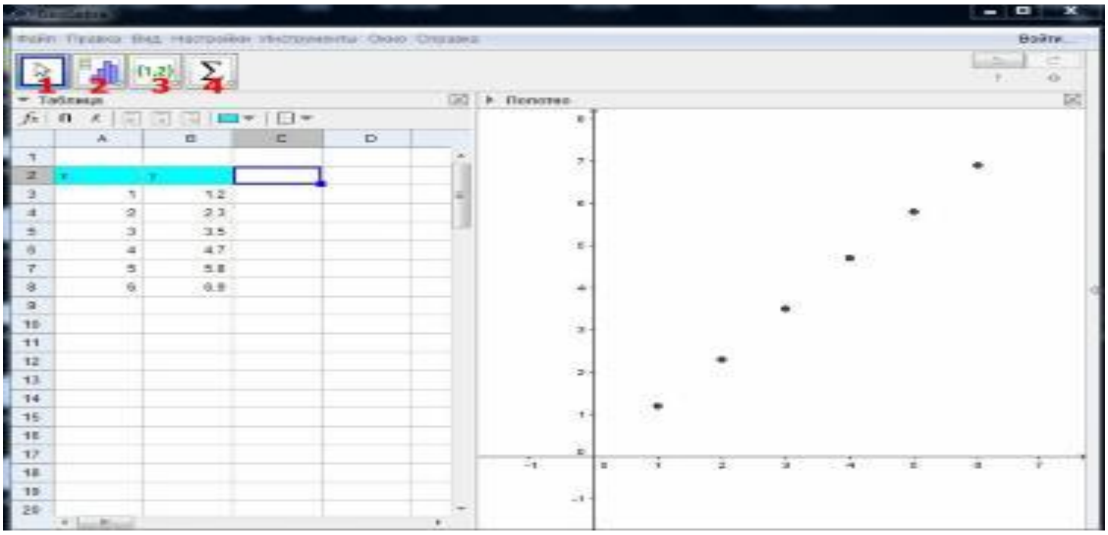

Рис. 12. Рабочее окно перспективы «Spreadsheet»

Настраивает программу под использование электронной таблицы GeoGebra. С одной стороны программы ячейки для ввода данных и вычислений, с другой – область для построений. Данная область является хорошим бесплатным аналогом Microsoft Excel, который в отличие от GeoGebra не обладает такой динамичностью. Помимо обычных инструментов при нажатии на ячейку в перспективе открываются дополнительные инструменты для работы с таблицей.

Первая группа – перемешать, которая позволяет выбирать и перемещать объекты.

Вторая группа содержит в себе инструменты: анализ одной переменной; регрессивный анализ; анализ нескольких переменных; калькулятор вероятностей.

Третья группа включает: создать список; создать список точек; создать матрицу; создать таблицу; создать ломаную.

Четвертая группа содержит: сумма; среднее арифметическое; посчитать количество ячеек; максимум; минимум.

Также имеются разнообразные инструменты для форматирования таблицы: выравнивание, по какому-либо краю; изменение цвета фона, шрифта; изменение стиля таблицы.

4. «CAS», представленная на рис. 13.

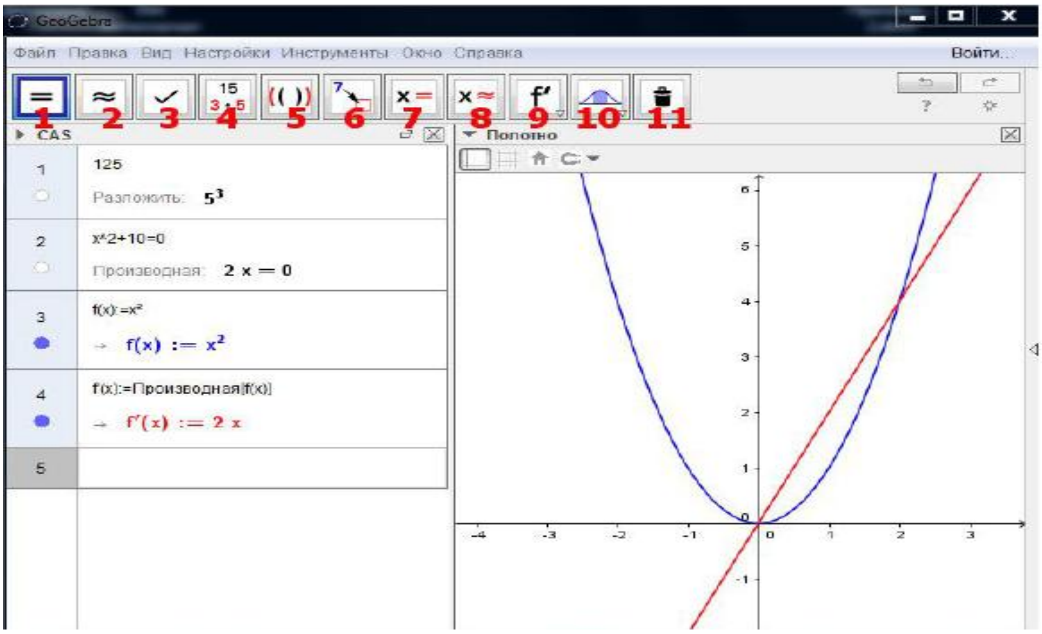

Рис. 13. Рабочее окно перспективы «CAS»

CAS – Computer Algebra Systems. Настраивает рабочую область под систему компьютерной алгебры. Позволяет решать алгебраические уравнения, находить производные функций, интегралы и т. д.

Перспектива CAS открывает новые инструменты для работы с компьютерной алгеброй.

Первая группа – вычислить.

Вторая группа – десятичная дробь, которая представляет число в виде десятичной дроби.

Третья группа – закрепить ввод, сохраняет и проверяет ввод.

Четвертая группа – факторизация, раскладывает на множители.

Пятая группа – раскрытие скобок.

Шестая группа – замена, заменяет часть выражения.

Седьмая группа – решить, находит одно или более решений уравнений.

Восьмая группа – численное решение, численно решает одно или более уравнений.

Девятая группа – позволяет находить производную и интеграл.

5. «3D Graphics», представленная на рис.14.

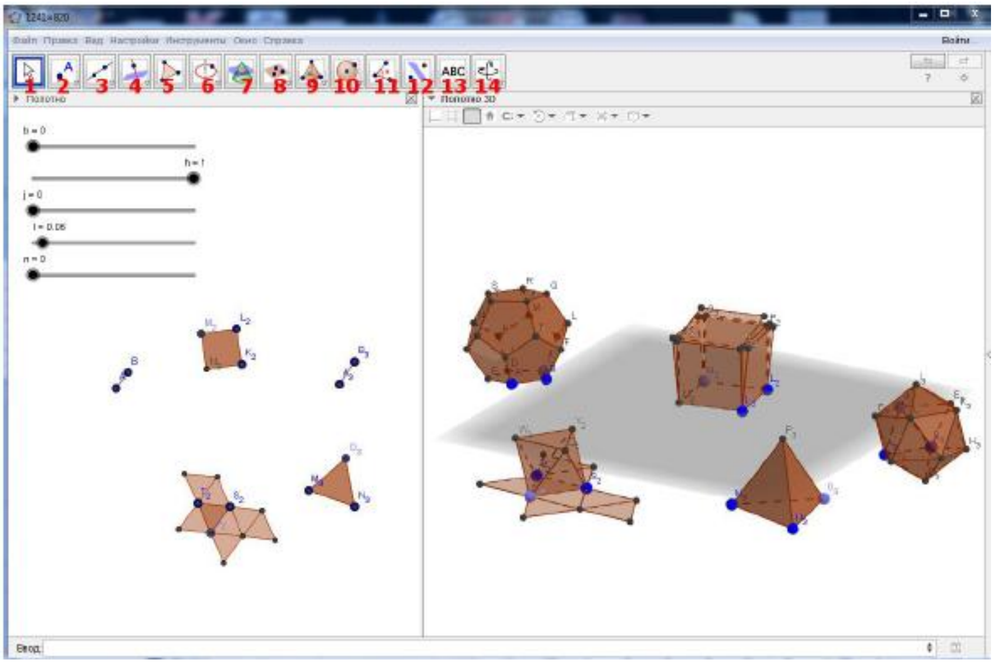

Рис. 14. Рабочее окно перспективы «3D Graphics»

Настраивает программу под построение 3D графических объектов, таких как конусы, треугольники, параллелепипеды, призмы и т.д.

Перспектива 3D Graphics открывает новые возможности для работы с GeoGebra. Она позволяет моделировать 3D графические объекты, которые в дальнейшем можно использовать на уроках, как информатики, так и других предметов в которых требуются какие-либо наглядные демонстрации. Например, демонстрации геометрических тел на уроках геометрии.

Также данная перспектива открывает новый набор инструментов, который недоступен в 2D режиме. Рассмотрим все инструменты перспективы 3D Graphics.

Первая группа – движение. Данная группа инструментов позволяет изменять положение или отслеживать движение объектов. В группу входит инструмент: перемещать.

Вторая группа – точки. В данную группу входят: точка; точка на объекте; прикрепить/снять точку; пересечение; середина или центр.

Третья группа – прямые линии. В данную группу входит: прямая; отрезок; отрезок заданной длины; луч; вектор; отложить вектор.

Четвёртая группа – специальные линии куда входят: перпендикулярная прямая; параллельная прямая; биссектриса угла; касательная; поляра и диаметр; локус.

Пятая группа – многоугольник, с соответствующим инструментом.

Шестая группа – окружности и дуги, с инструментами: окружность по точке и оси; окружность с центром, радиусом и направлением; окружность по трем точкам; дуга по центру и двум точкам; дуга по трем точкам; сектор по центру и двум точкам; сектор по трем точкам; эллипс; гипербола; парабола; коника по пяти точкам.

Седьмая группа – кривая пересечения, с соответствующим инструментом.

Восьмая группа – плоскости, куда входят инструменты: плоскость через 3 точки; плоскость; перпендикулярная плоскость; параллельная плоскость.

Девятая группа – геометрические фигуры, с инструментами: пирамида; призма; выдавить пирамиду и конус; выдавить призму и цилиндр; конус; цилиндр; правильный тетраэдр; куб; развертка.

Десятая группа – сферы: сфера по центру и точке; сфера по центру и радиусу.

Одиннадцатая группа – измерения, куда входят: угол; расстояние или длина; площадь; объем.

Двенадцатая группа – отражение относительно плоскости; отражение относительно прямой; отражение относительно точки; вращать объект вокруг прямой; параллельный перенос по вектору; гомотетия относительно точки.

Тринадцатая группа – текст.

Четырнадцатая группа – действия: вращать чертеж; переместить чертеж; увеличить; уменьшить; показать/скрыть объект; показать/скрыть обозначение; копировать стиль; удалить.

6. «Probablity», представленная на рис.15. Переводит программу в режим работы с инструментами статистики и вероятностей.

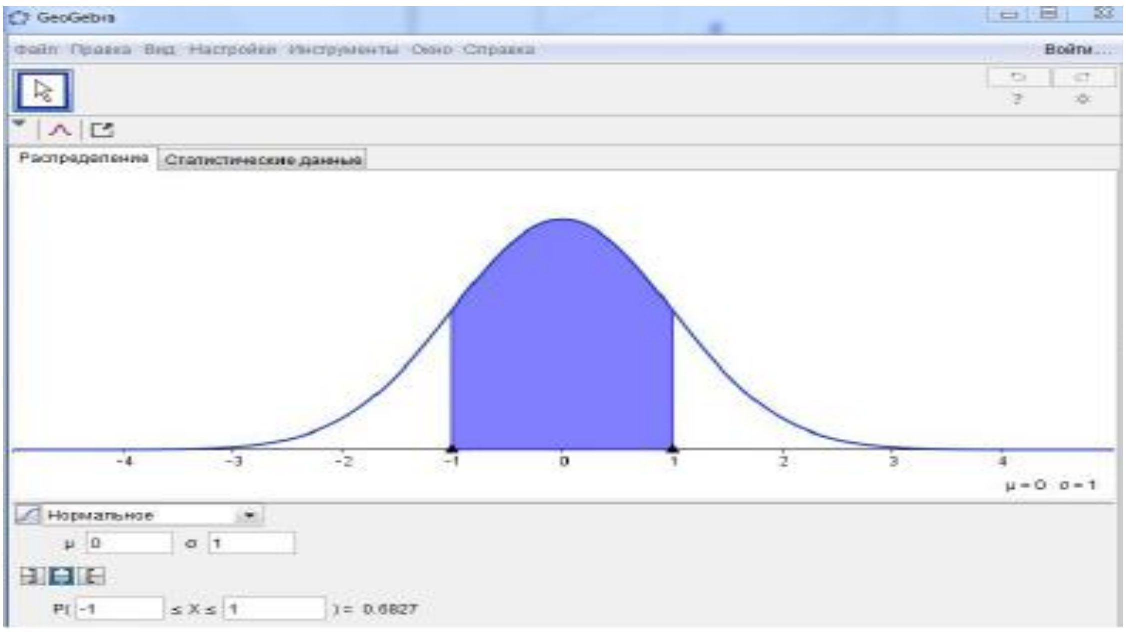

Рис. 15. Рабочее окно перспективы «Probablity»

2.2 Решение задач на построение в GeoGebra

Привлечение возможностей систем компьютерной алгебры (СКА) к учебному познанию начинается с постановки и решения задач на построения динамического чертежа.

Задачи на построение в СКА не являются чем-то самостоятельным. С их постановки и решения начинается решение всякой геометрической задачи, доказательство любой теоремы, получение или осмысление определения геометрического понятия. Они являются своего рода самостоятельно формулируемыми подзадачами. Этим и определяется их сходство с построением схематических чертежей.

Для своевременной подготовки учащихся к этой деятельности задачи на построение в СКА должны образовывать непрерывно развивающуюся – содержательно-методическую линию пронизывающую весь систематический курс геометрии. Эта линия должна вобрать в себя и линию задач на построение циркулем и линейкой.

Основными результатами обучения решению задач циркулем и линейкой являются следующие:

− знания о конструктивных возможностях циркуля и линейки;

− знания об особенностях решения задач на построения;

− знания о некоторых методах решения задач на построение: методом ГМТ, методом подобия, методом движения;

− навыки решения базовых задач на построение;

− умения решать задачи на построение, сводящиеся к базовым.

Эти образовательные результаты могут и должны быть достигнуты и при обучении решению задач на построение в СКА (за исключением приобретения практических навыков манипулирования циркулем и линейкой). Эта возможность определяется наличием в СКА инструментов, которые являются аналогами циркуля и линейки.

Использование этих инструментов в отличие от использования циркуля и линейки акцентирует внимание учащихся на условиях задания фигуры (наборе элементов, определяющем фигуру − характеристических элементах), так как сами построения выполняются автоматически. Кроме того наборы характеристических элементов фигуры выделяются в графическом окне цветом и отмечаются на панели объектов как свободные объекты.

Кроме того, в СКА существуют дополнительные инструменты, выводящие на экран результаты решения базовых задач на построение циркулем и линейкой («биссектриса угла», «середина отрезка», «параллельная прямая» и др.), а также возможности пополнения конструктивных инструментов.

Обучение построению с помощью инструментов СКА должна, по нашему мнению, осуществляться в соответствии со следующей методической схемой:

1) обучение применению инструмента (пропедевтический);

2) формирование знаний о принципах его работы − раскрытие алгоритма решения соответствующей базовой задачи циркулем и линейкой и его теоретическое обоснование (основной);

3) формирование умений применять инструмент в сочетании с другими для решения типовых задач на построение и задач к ним сводящихся (заключительный).

Рассмотрим пример.

Задача 3. Построить окружность, равновеликую кольцу, образованному двумя концентрическими окружностями с радиусами R и r, где $R > r$ в GeoGebra.

Вычислим: $S_{кол.} = \pi(R^2 - r^{2)} = S_{окр.}$ следовательно, $r_{окр.} = \sqrt{(R-r)(R+r)}$

Для построения радиуса, окружности циркулем и линейкой по двум данным отрезкам – радиусам данных концентрических окружностей R и r. Необходимо построить высоту, опущенную на гипотенузу длины *2R* прямоугольного треугольника, которая делит эту гипотенузу на отрезки, равные R-r и R+r (рис. 16)

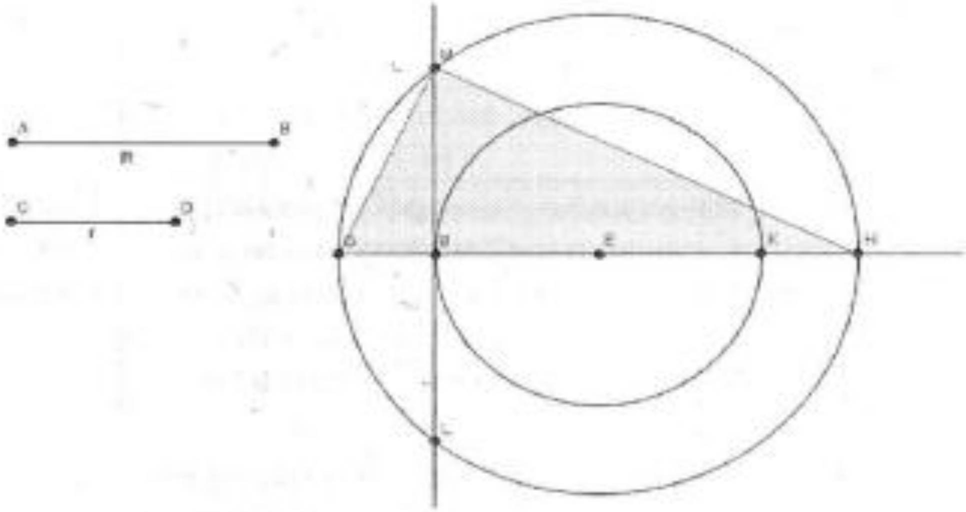

Рис. 16. Чертеж к задаче 3

При построении отрезка заданной длины в СКА можно в диалоговом окне инструмента «окружность по центру и радиусу» указать выражение $\sqrt{(R-r)(R+r)}$, или в строке ввода записать уравнение окружность с произвольно выбранным центром и данным радиусом.

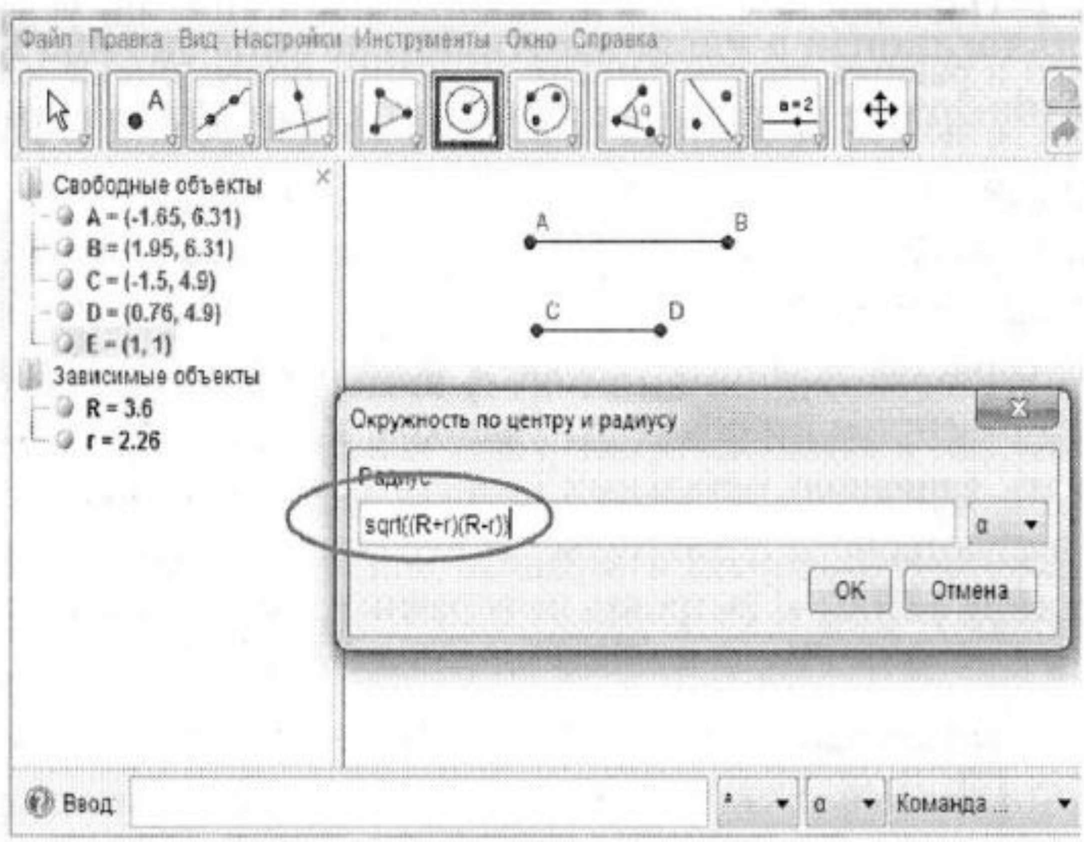

Рис. 17. Ввод формулы

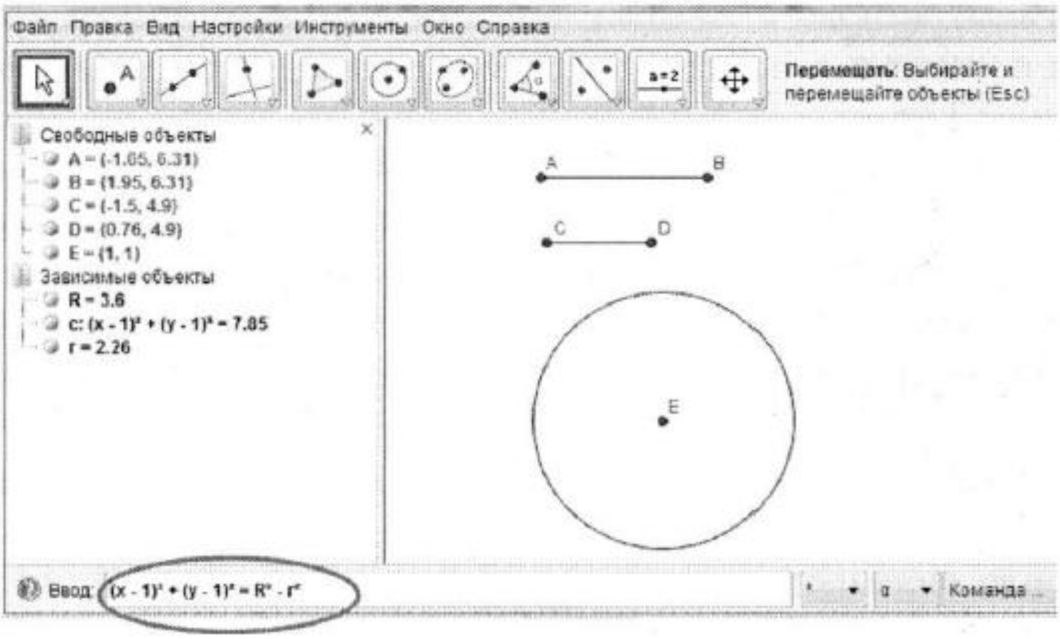

Рис. 18. Ввод уравнения в строку ввода GeoGebra

2.3 Решение задач с параметром в GeoGebra

Задачи с параметрами являются наиболее трудной частью ЕГЭ, поэтому формирование единого подхода к их решению является важной методической проблемой. Основным помощником при этом может стать компьютерная среда GeoGebra с ее анимационными возможностями [5]. Суть анимационно-геометрического метода состоит в следующем. Сначала условие задачи моделируется геометрически (графически) на экране компьютера. Затем, используя анимационные возможности, задачу решаем на компьютерном экране. Наконец, описываем увиденное на экране решение математически. Ученик, лишенный компьютерной поддержки, сохраняя геометрическую направленность решения, выполняет ключевые рисунки схематично на основе математических исследований, дополняя анимационные изменения силой своего воображения.

Рассмотрим ряд примеров.

Задача 5. Найдите количество решений системы

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy + 4x - y - 12)\cdot\sqrt{x+3}}{\sqrt{9-x}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра a.

Решение. Открываем файл GeoGebra и сначала строим график первого уравнения системы. Записываем его в строку ввода и после ввода на экране компьютера видим два отрезка (на рис. 19 изображен график).

Для осмысления увиденного заметим, что областью определения первого уравнения является совокупность условий $x+3\geq 0$ и $9-x>0$, откуда $-3\leq x<9$. Геометрически это означает, что график первого уравнения принадлежит полосе, ограниченной вертикальными прямыми $x=-3$ и $x=9$, причем вторая прямая исключается из полосы. Чтобы понять происхождение пары отрезков, рассмотрим равенство $y^2-xy+4x-y-12=0$, как уравнение относительно переменной y: $y^2-(x+1)y+(4x-12)=0$. Корни уравнения: $y_1=x-3$, $y_2=4$. Следовательно, $y^2-xy+4x-y-12=(y-y_1)(y-y_2)=(y-x+3)(y-4)$. Таким образом, отрезки, увиденные на экране, являются решениями следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} y-x+3=0, \\ -3\leq x<9, \end{cases} \qquad \begin{cases} y-4=0, \\ -3\leq x<9. \end{cases}$$

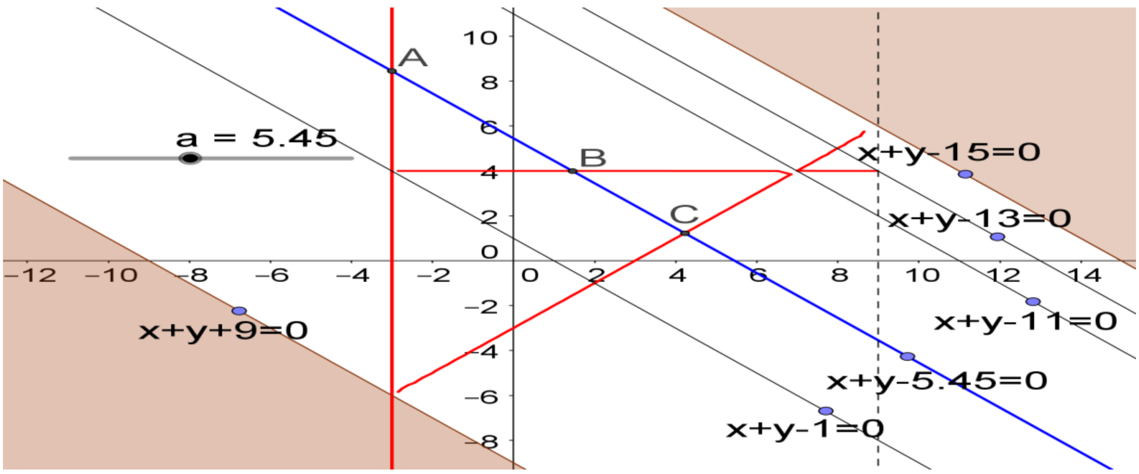

Рис. 19. График первого уравнения системы

Заметим, что компьютер не выдает график уравнения $\sqrt{x+3}=0$, и в этом отношении он может подвести. График этого уравнения мы добавляем самостоятельно в виде прямой $x=-3$. Таким образом, решением первого уравнения данной системы является вертикальная прямая $x=-3$ и пара отрезков.

Теперь займемся вторым уравнением системы. Строим ползунок для параметра a и строкой ввода строим график уравнения $x+y-a=0$ (на рисунке – прямая, выделенная синим цветом). Помечаем эту прямую надписью. В нашем случае $x+y-5.45=0$. Перемещаем ползунок в положение, при котором наблюдаем максимальное количество точек пересечения графиков уравнений данной системы, и отмечаем точки пересечения A, B, C. Теперь у нас все готово для получения ответа. Изменяем на ползунке значения параметра a, наблюдаем соответствующее перемещение синей прямой и количество точек пересечения этой прямой с графиком первого уравнения системы. Для наглядности строим и надписываем «рубежные» положения синей прямой.

Ответ: 1) если $a\le -9$ или $a\ge 15$, то система имеет единственное решение (принадлежащее одной из залитых розовым частей плоскости);

2) если $-9<a\le 1$, или $a=11$, или $13\le a<15$, то система имеет 2 решения;

3) если $1<a<13$ и $a\ne 11$, то система имеет 3 решения.

Для подтверждения ответа изменяем значение параметра a на ползунке и на панели объектов читаем соответствующие решения системы в виде точек A, B, C. Результаты представим в виде таблицы.

Значение параметра a	Решения системы	Количество решений
$a=-10$	$A=(-3,-7)$	1
$a=-9$	$A=(-3,-6)$	1

$a=1$	$A=(-3,4)$, $B=(2,-1)$	2
$a=5$	$A=(-3,8)$, $B=(1,4)$, $C=(4,1)$	3
$a=11$	$A=(-3,14)$, $B=(7,4)$	2
$a=12$	$A=(-3,15)$, $B=(7.5,4.5)$, $C=(8,4)$	3
$a=13$	$A=(-3,16)$, $B=(8,5)$	2
$a=14$	$A=(-3,17)$, $B=(8.5,5.5)$	2
$a=15$	$A=(-3,18)$	1
$a=16$	$A=(-3,19)$	1

Таблица 1. Различные значения параметра α

Дадим план решения задачи учеником, лишенным возможности использовать компьютер и вынужденным выполнять необходимые рисунки схематично.

1) Находим область определения первого уравнения данной системы: $-3 \le x < 9$. Следовательно, график первого уравнения находится внутри полосы, ограниченной прямыми $x=-3$ и $x=9$, причем вторая прямая исключается из полосы.

2) Решая уравнение $y^2 - xy + 4x - y - 12 = 0$ относительно переменной y, находим разложение на множители: $y^2 - xy + 4x - y - 12 = (y - x + 3)(y - 4)$. Таким образом, первое уравнение эквивалентно следующей совокупности условий:

$$x=-3, \text{ или } \begin{cases} y - x + 3 = 0, \\ -3 \le x < 9, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y - 4 = 0, \\ -3 \le x < 9. \end{cases}$$

Первое условие определяет вертикальную прямую, а две системы определяют пару отрезков без крайних правых точек внутри выделенной выше вертикальной полосы. Все это составляет график первого уравнения данной системы. Его легко построить схематично.

3) Второе уравнение $x+y-a=0$ определяет прямую, зависящую от параметра a. Строим «рубежные» положения этой прямой при различных значениях параметра и, глядя на схематичный чертеж (см. рис.19), выписываем ответ.

На уроке это решение целесообразно сопровождать построением анимационного рисунка 19.

Задача 6. Найдите количество решений системы

$$\begin{cases} |x|+2|y|=1, \\ |y|+x^2=a, \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра a.

Решение. Как и в предыдущей задаче, строкой ввода строим график первого уравнения $|x|+2|y|=1$, на полотне появляется ромб. Затем, строим ползунок для параметра a и строкой ввода строим график уравнения $|y|+x^2=a$, «управляемого» ползунком (фигура из двух парабол). Изменяя значения a на ползунке, фиксируем «рубежные» положения подвижной фигуры из двух парабол (рис. 20). Чтобы найти значение a для случая шести точек пересечения, используем, что верхняя парабола проходит через точку $D=(0,0.5)$ – вершину неподвижного ромба. Подставляя координаты точки D в уравнение параболы $y+x^2=a$, получаем $a=0.5$.

Наконец, чтобы найти a, при котором ромб будет касаться фигуры из двух парабол, решаем систему $\begin{cases} x+2y=1, \\ y+x^2=a. \end{cases}$

Выражаем y из первого уравнения и подставляем во второе уравнение. Получаем квадратное уравнение, дискриминант которого приравниваем к нулю. Получаем $a=\dfrac{7}{16}=0.4375$. Теперь у нас все готово, чтобы написать ответ, глядя на рис. 20.

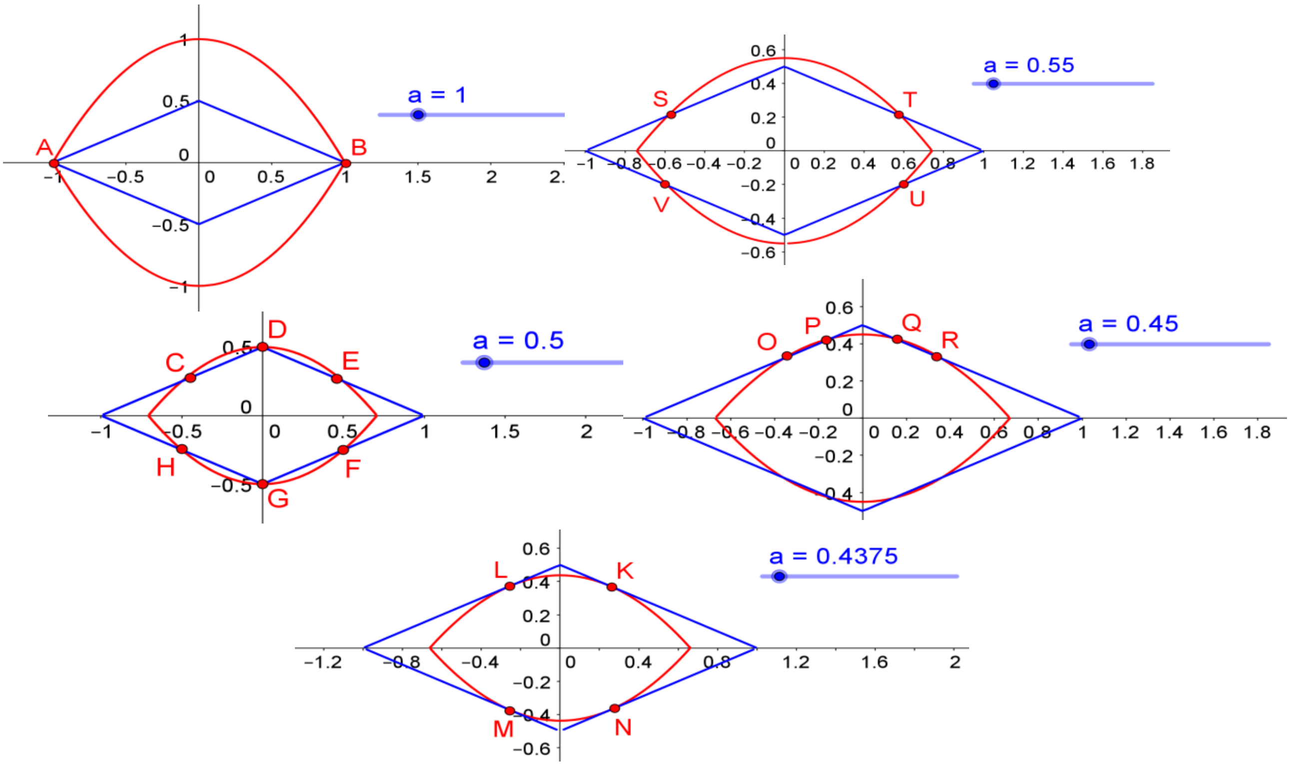

Рис. 20. Графики двух уравнений из системы

Ответ: 1) если $a < 0.4375$ или $a > 1$, то система не имеет решений;

2) если $a = 1$, то система имеет два решения: $A = (-1{,}0)$, $B = (1{,}0)$;

3) если $0.5 < a < 1$ или $a = 0.4375$, то система имеет 4 решения (например, на рисунке 20, при $a = 0.55$, решением будут точки S, T, U, V).

4) при $a = 0.5$ система имеет 6 решений (на рис.20 это точки C, D, E, F, G, H).

5) если $0.4375 < a < 0.5$, то система имеет 8 решения (например, на рисунке 20 при $a = 0.5$ решениями будут точки O, P, Q, R и им симметричные.

2.4 Использование системы GeoGebra при изучении темы «Решение нестандартных уравнений»

Обратимся к оцениванию образовательной значимости применения СКА при обучении решению нестандартных уравнений.

Покажем на конкретном примере использования СКА GeoGebra для обоснования необходимости применения тригонометрической подстановки при решении уравнения. Такое использование СКА GeoGebra назовем «компьютерным обоснованием», акцентируя внимание исключительно на его демонстрационной функции.

Задача 7. Пусть требуется решить уравнение: $8x^3-6x+1=0$

После безуспешных попыток решить данное уравнение различными способами (угадывание целого/рационального корня, разложение на множители и т.д.) предлагаем учащимся с помощью GeoGebra построить график левой части этого уравнения. Получим график функции ,изображенный на рис. 21 :

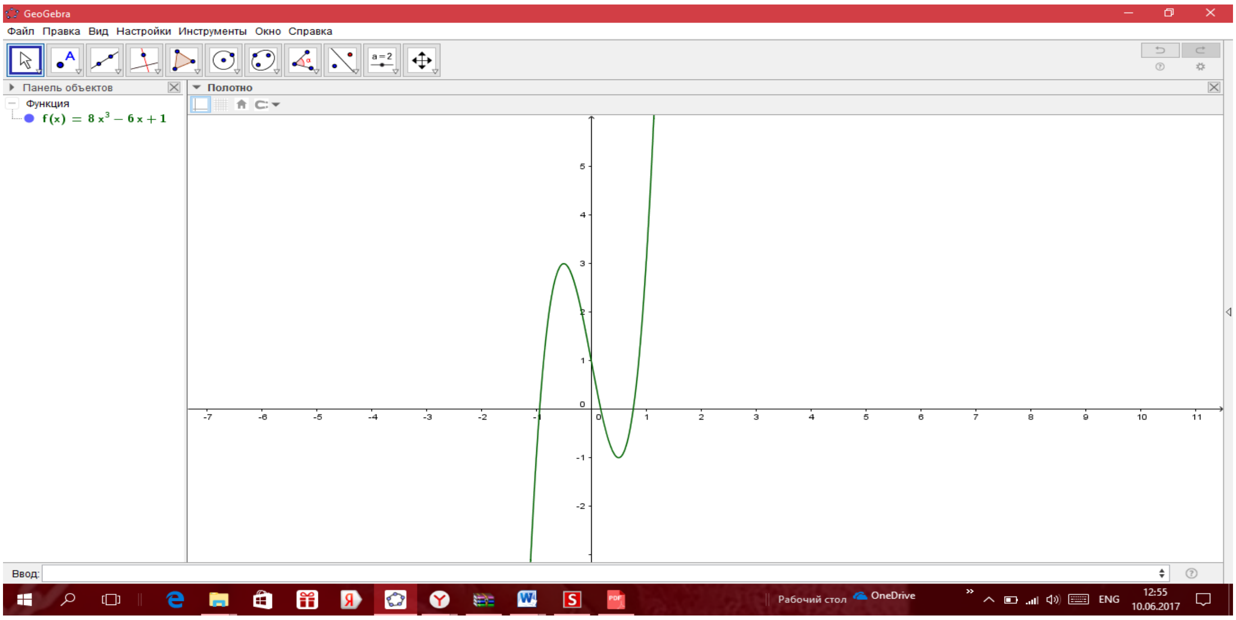

Рис. 21. График функции $8x^3-6x+1=0$

«Компьютерное обоснование» здесь выполняет функцию графической демонстрации для выдвижения следующего дедуктивного умозаключения:

– так как все точки пересечения графика функции с абсциссой находятся на интервале (-1;1) , то все корни этого уравнения по модулю меньше 1;

– так как все корни уравнения по модулю меньше 1, а все значения косинусов углов из интервала $(0;\pi)$ (синусов углов из интервала

$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ также меньше 1 по модулю, можно сделать замену переменной $\chi = \cos\alpha$ или $\chi = \sin\alpha$, где $\alpha \in (0;\pi)$ или $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ соответственно.

После этого умозаключения от решения уравнения переходим к решению системы через косинус:

$$8x^3 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha + 1 = 0 \\ x = \cos\alpha \\ \alpha \in (0;\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0 \\ x = \cos\alpha \\ \alpha \in (0;\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3\alpha = -\frac{1}{2} \\ x = \cos\alpha \\ \alpha \in (0;\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \cos\alpha \\ \alpha \in (0;\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \cos\alpha \\ \alpha \in (0;\pi) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{2\pi}{9} \\ \alpha = \frac{4\pi}{9} \\ \alpha = \frac{8\pi}{9} \end{array}\right. \\ x = \cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \cos\frac{2\pi}{9} \\ x = \cos\frac{4\pi}{9} \\ x = \cos\frac{8\pi}{9}. \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \cos\frac{2\pi}{9}; \cos\frac{4\pi}{9}; \cos\frac{8\pi}{9}.}$$

Решение системы через синус:

$$8x^3 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sin^3\alpha - 6\sin\alpha + 1 = 0 \\ x = \sin\alpha \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha - \frac{1}{2} = 0 \\ x = \sin\alpha \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3\alpha = \frac{1}{2} \\ x = \sin\alpha \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \sin\alpha \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = (-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \sin\alpha \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{7\pi}{18} \\ \alpha = \frac{\pi}{18} \\ \alpha = \frac{5\pi}{18} \end{array}\right. \\ x = \sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sin\frac{7\pi}{18} \\ x = \sin\frac{\pi}{18} \\ x = \sin\frac{5\pi}{18} \end{array}\right. .$$

$\boxed{\textbf{Ответ: } -\sin\frac{7\pi}{18};\sin\frac{\pi}{18};\sin\frac{5\pi}{18}.}$

Приведенный пример продемонстрировал, что «компьютерное обоснование» в отличие от чисто алгебраического не только убеждает учащихся в «естественности» такой подстановки, но и раскрывает перед ними причину ее необходимости. Такой положительный эффект достигается за счет графической интерпретации данного уравнения.

Однако мы не считаем, что «компьютерным обоснованием» можно заменить алгебраическое. Во-первых, потому, что доказать правильность построения графика функции с помощью СКА GeoGebra на несколько порядков сложнее, чем убедиться в правильности его построения методами математического анализа. Во-вторых, эти обоснования имеют разные образовательные функции:

– «компьютерное обоснование» подводит учащихся к идее замены переменной, посредствам демонстрации графической интерпретации уравнения;

– алгебраическое обоснование доказывает необходимость такой замены за счет установления взаимосвязи между графиком функции и корнями уравнения.

Использование СКА GeoGebra при обучении решению нестандартных уравнений представляет собой процесс перехода от «компьютерного обоснования» к алгебраическому.

При этом можно говорить о существовании двух различных уровней умений решения нестандартных уравнений с использованием GeoGebra.

I. **Эмпирический уровень** отличается умением убеждаться в «естественности» применения выбранного способа решения уравнения с помощью GeoGebra, применяемой для построения графика функции.

II. **Абстрактно-теоретический уровень** отличается умением доказывать полученныйс помощью СКА GeoGebra вид графика функции, а также использовать его для обобщения возможных вариаций этого эксперимента.

Рассмотрим особенности обучения решению нестандартных уравнений, которые демонстрируют процесс перехода от первого уровня ко второму.

Для того чтобы достичь эмпирического уровня, необходимо систематизировать «накопленный» опыт учащихся, связанный с использованием замены переменной для решения уравнений пройденных ранее. Основой данной систематизации выступает интеграция субъектного и «накопленного» опыта учащихся по И.С. Якиманской [6] (табл. 1).

Этапы интеграции опытов	Описание этапов работы с нестандартным уравнением, решение которого требует тригонометрической замены
Актуализация субъектного опыта учащихся, отнесенного к изучаемому вопросу	Постановка перед учащимися проблемного задания: придумать способ замены переменной для решения заданного уравнения
Раскрытие содержания субъектного опыта учащихся	Сбор информации о вариантах по замене переменной предлагаемых учащимися (ни один из предложенных вариантов не подвергается критике)
Систематизация содержания субъектного опыта учащихся через его сопоставление с «накопленным»	Проводится обоснованный выбор из всех предложенных вариантов замены переменной, который на их взгляд позволит решить заданное уравнение. Результатом выполнения этого задания является установление наиболее распространенных ошибок, совершаемых учащимися при замене переменной
Формирование нового субъектного опыта учащихся	Введение тригонометрической замены переменной и формирование умений решать подобные уравнения используя данный метод

Таблица 2. Интеграция субъектного и «накопленного» опыта учащихся

Основной целью данного этапа является формирование умений строго доказывать не только правильность построения параметрического графика функции для обоснования необходимости тригонометрической замены, в исследуемом уравнении, но и динамическое постоянство количества корней расположенных в интервале (-1;1) при заданном параметре $-1 < \alpha < 1$. В этой связи основу методики на данном уровне должен составлять когнитивно-визуальный подход к обучению математике, разработанный В.А. Далингером [7].

С позиции данного подхода график функции левой части заданного уравнения выступает средством визуальной опоры алгебраических операций, выполняемых в ходе объяснения эмпирически установленного факта количества и расположения точек пересечения с осью абсцисс. Изменение работы с нестандартным уравнением на каждом из представленных этапов проявляется в появлении новых операций: построение графика функции и его обоснование; алгебраическое доказательство полученных результатов. Рассмотрим особенности применения этих операций на примере оформления решения предыдущего уравнения, предварительно переписав его в следующем виде:

$$4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0.$$

Для полной иллюстрации работы с данным уравнением на абстрактно-теоретическом уровне с использованием СКА GeoGebra необходимо провести параметризацию свободного члена и изменить условия задания с решения на доказательство. Докажите, что для любого значения параметра ɑ (-1;1) уравнение $4x^3 - 3x + a = 0$ имеет ровно три различных корня, каждый из которых удовлетворяет неравенству $|x|$<1.

1. **Построим график функции** $y = 4x^3 - 3x + \alpha$

Записываем данные в линейном виде $y = 4 * x\text{^}3 - 3 * x + \alpha$ в окно нижней панели «ВВОД после чего в разделе «ПОЛЗУНОК» задаем необходимый интервал значения параметра от -1 до1 (рис. 22)

2. **Проводим компьютерный эксперимент.**

Цель эксперимента – проверка количества точек пересечения с осью абсцисс (т.е. определение количества корней уравнения и их числовая оценка) при изменении параметра -1<α<1.

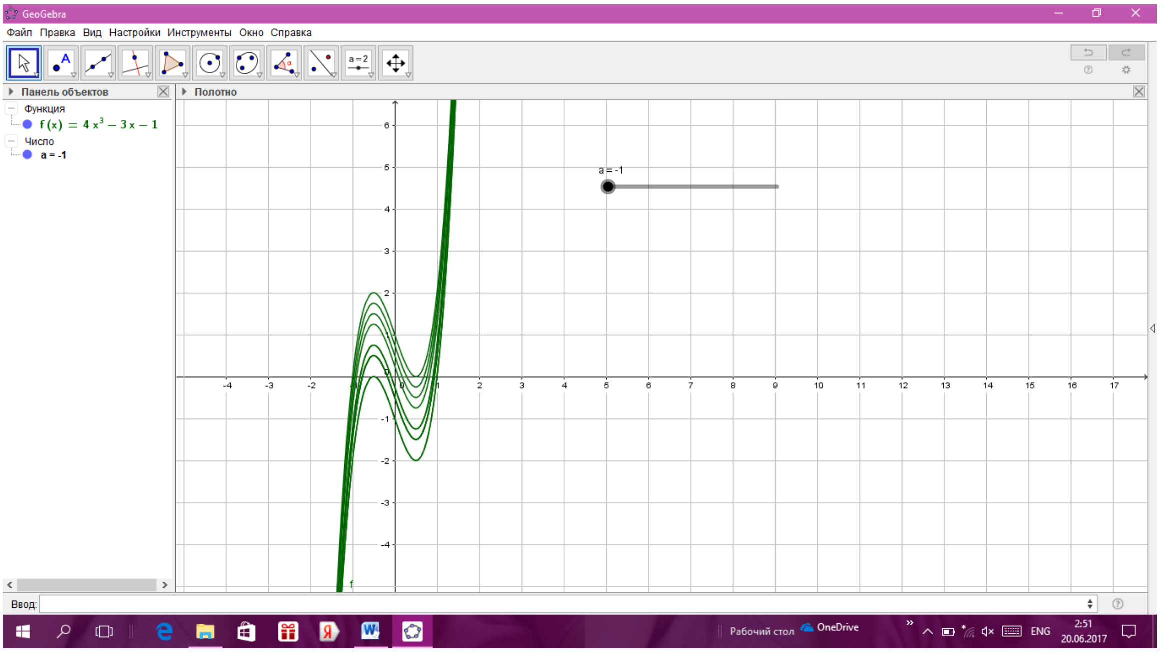

Рис. 22. График функции $y = 4x^3 - 3x + \alpha$

Ход эксперимента:

а) Передвигаем инструмент «ПОЛЗУНОК» с заранее заданным шагом (для удобства визуального восприятия рекомендуемое изменение шага параметра 0,25),так чтобы величина параметра α менялась в пределах от -1 до 1.

б) Наблюдаем за количеством точек пересечения с осью абсцисс и их числовым значением. Их количество остается равным, а значения корней не превышают по модулю 1в течение всего эксперимента.

Вывод: эксперимент подтвердил, что при заданном значении параметра α исходное уравнение имеет ровно три различных корня, каждый из которых по модулю меньше 1.

3. Докажем, что все корни данного уравнения по модулю меньше 1.

Перепишем уравнение $4x^3 - 3x + \alpha = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = -\alpha$.

Пусть $|x| \geq 1$,тогда $|4x^2 - 3| \geq 1$,значит $|x(4x^2 - 3)| \geq 1$. Получили, что при $|x| \geq 1$ левая часть уравнения по модулю не меньше единицы, а правая по модулю меньше 1.Таким образом, возможно сделать замену $x = \cos\alpha$, при $\alpha \in (0;\pi)$ и решить полученную систему.

$$\begin{cases}4x^3-3x=-a\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=-a\\ x=\cos\alpha\\ \alpha\in(0;\pi)\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos3\alpha=-a\\ x=\cos\alpha\\ \alpha\in(0;\pi)\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}3\alpha=\pm\arccos(-a)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x=\cos\alpha\\ \alpha\in(0;\pi)\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\pm\frac{1}{3}\arccos(-a)+\frac{2\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}\\ x=\cos\alpha\\ \alpha\in(0;\pi)\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\alpha=\pm\frac{1}{3}\arccos a+\frac{(2n\pm1)\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}\\ x=\cos\alpha\\ \alpha\in(0;\pi)\end{array}\right.\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\alpha=-\frac{1}{3}\arccos a+\pi\\ \alpha=-\frac{1}{3}\arccos a+\frac{\pi}{3}\\ \alpha=-\frac{1}{3}\arccos a-\frac{\pi}{3}\end{array}\right.\\ x=\cos\alpha\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-\cos\left(\frac{1}{3}\arccos a\right)\\ x=\cos\left(\frac{1}{3}\arccos a+\frac{\pi}{3}\right)\\ x=\cos\left(\frac{1}{3}\arccos a-\frac{\pi}{3}\right)\end{array}\right.\\ a\in(-1;1)\end{cases}$$

Ответ: $-\cos\left(\frac{1}{3}\arccos a\right);\cos\left(\frac{1}{3}\arccos a+\frac{\pi}{3}\right);\cos\left(\frac{1}{3}\arccos a-\frac{\pi}{3}\right)$, **при** $a\in(-1;1)$

Или сделать замену x=sinα при $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{cases}3x-4x^3=a\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=a\\ x=\sin\alpha\\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin3\alpha=a\\ x=\sin\alpha\\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}3\alpha=(-1)^n\arcsin a+\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x=\sin\alpha\\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{(-1)^n}{3}\arcsin a+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}\\ x=\sin\alpha\\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ a\in(-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{1}{3}\arcsin a\\ \alpha = -\dfrac{1}{3}\arcsin a + \dfrac{\pi}{3}\\ \alpha = \dfrac{1}{3}\arcsin a\end{array}\right.\\ x = \sin\alpha\\ a \in (-1;1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = \sin\left(\dfrac{1}{3}\arcsin a\right)\\ x = -\sin\left(\dfrac{1}{3}\arcsin a\right)\\ x = -\sin\left(\dfrac{1}{3}\arcsin a - \dfrac{\pi}{3}\right)\end{array}\right.\\ a \in (-1;1)\end{cases}$$

Ответ: $-\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin a - \frac{\pi}{3}\right); -\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin a\right); \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin a\right)$, **при** $a \in (-1;1)$

2.5 Применение программы GeoGebra на уроках математики как средство подготовки учащихся к ЕГЭ

Система компьютерной алгебры GeoGebra может быть эффективно использовано при обучении учащихся решению заданий с параметрами, которые считаются традиционно сложными, и, как показывают результаты аналитических отчеты результатов ЕГЭ прошлых лет и предыдущего года, небольшой процент выпускников школ справляются с заданиями группы С5. Это объясняется тем, что задачи с параметрами являются исследовательскими, предполагают развитое логическое мышление и сформированную математическую культуру. Хочется отметить, что задания С5 в целом предназначены для проверки знаний на том уровне требований, который традиционен в вузах с профильными экзаменом по математике. Они по своей постановке являются алгебраическими, однако предполагают и возможность применения функциональных и наглядно-геометрических представлений в процессе решения.

Задача 8.Задание С5 (ЕГЭ -2012).Найдите все значения α,при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = \alpha x - 1$ на промежутке (0;-∞) имеет не более двух корней.

Решение. Строим график функции $y=\left|\frac{5}{x}-3\right|$ на рассматриваемом промежутке (0;-∞): ветвь гиперболы с асимптотами x=0, y=-3. Далее симметричным отображением относительно оси абсцисс части графика, расположенной в нижней полуплоскости y<0, получаем график функции $y=\left|\frac{5}{x}-3\right|$ на промежутке (0;-∞).

Функция y=αx-1 задает прямую, проходящую через точку с координатами (0;-1) и угловым коэффициентом α:

1. Прямая y=αx-1, проходящая через нуль функции $y=\left|\frac{5}{x}-3\right|$, точку $(\frac{5}{3};0)$. Искомое значение $\alpha_1=\frac{3}{5}$ получаем непосредственной подстановкой;

2. Прямая y=αx-1,касательная к графику функции y=$-\frac{5}{x}+3$, x>0 (рис. 23).

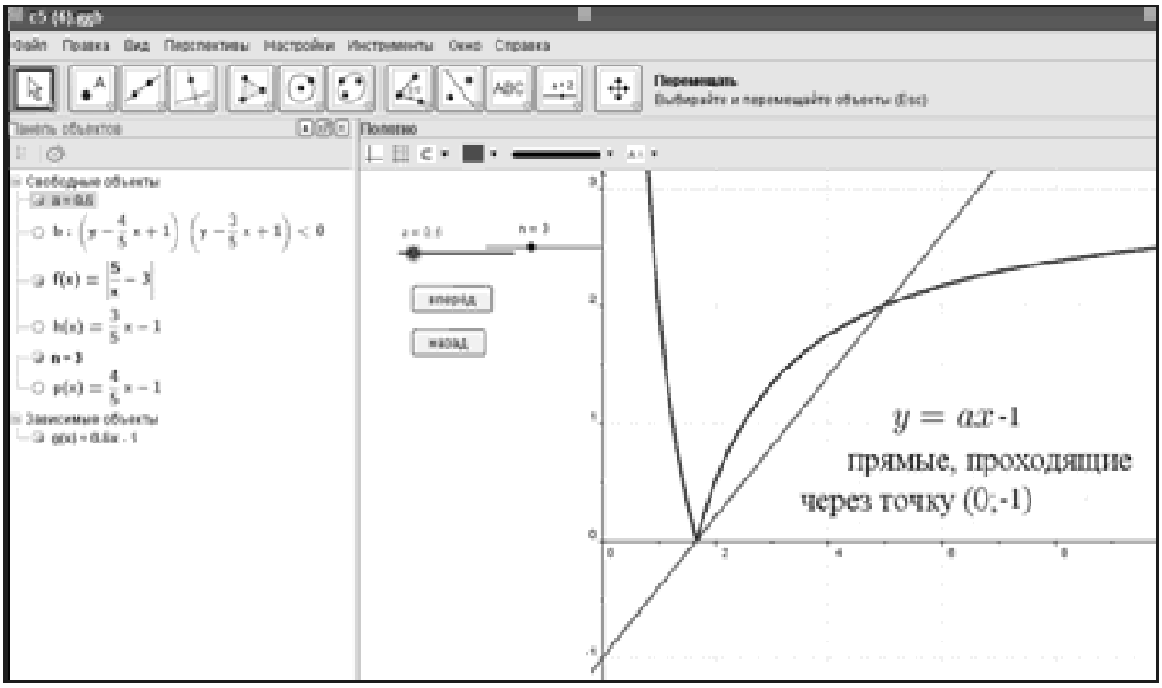

Рис. 23. График функции y=αx-1

Искомое значение $\alpha_2 = \frac{4}{5}$ получаем, приведя уравнение $-\frac{5}{x} + 3 = \alpha x - 1$ к квадратному $\alpha x^2 - 4x + 5 = 0$ и приравняв к нулю его дискриминант D_1=4−5α. Таким образом, получаем ответ: $(\frac{3}{5};\frac{4}{5})$ (рис. 24.).

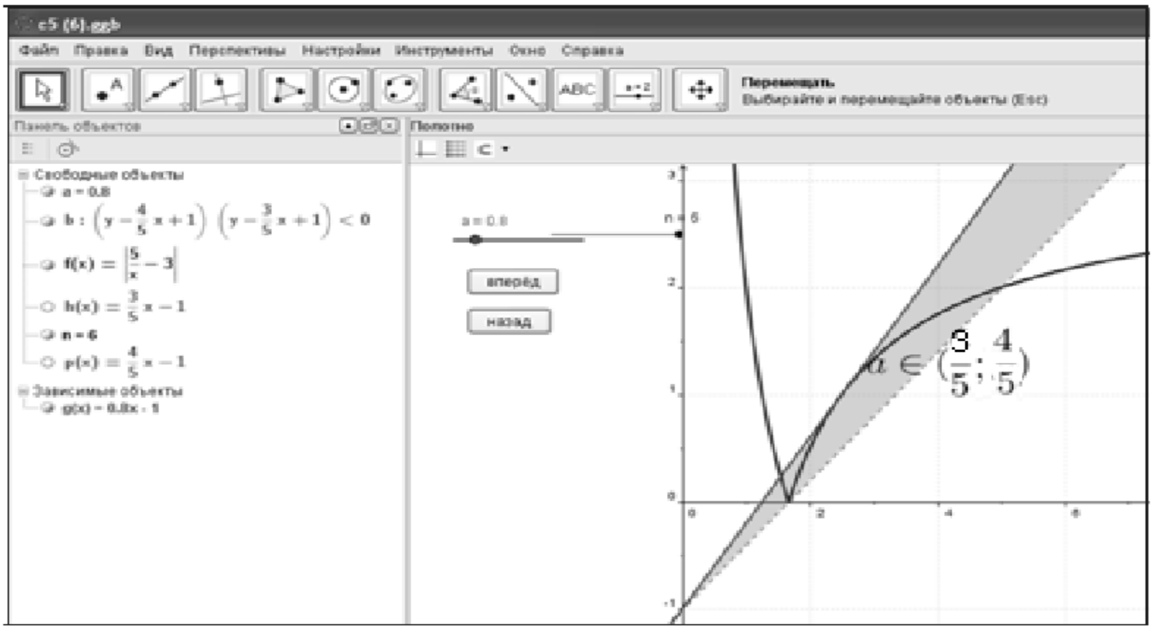

Рис. 24. Визуализация полученного решения задачи

Таким образом, во второй главе были рассмотрены примеры решения алгебраических задач (задачи с параметром, нестандартные уравнения) и геометрических задач (задачи на построение) с использованием среды GeoGebra. В заключительном параграфе указывают применение системы GeoGebra как средство подготовки учащихся к ЕГЭ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе были рассмотрены возможности использования систем компьютерной алгебры, в частности GeoGebra при решении алгебраических и геометрических задач при изучении математики в 10-11 классах. Изучив основы работы в GeoGebra были выделены плюсы по сравнению с другими программами.

Проанализированы методические рекомендации по решению задач с примененением системы GeoGebra. Мы выясняли, что использование программы GeoGebra на уроках позволяет:

– оптимизировать учебный процесс, более рационально используя время на различных этапах урока;

– осуществлять дифференцированный подход в обучении;

– проводить индивидуальную работу, используя персональные компьютеры;

– снизить эмоциональное напряжение на уроке, внося в него элемент игры,

– расширять кругозор учащихся;

– способствует развитию познавательной активности учащихся.

Прогнозируемые эффекты от применения данной системы на уроках математики:

– возможно повышение интереса к изучаемому предмету у слабо успевающих учащихся;

–повышение уровня самооценки;

– развитие навыка самоконтроля;

– побуждение к открытию и изучению нового в сфере информационных технологий, желанию поделиться с товарищами своими знаниями.

Материалы данной ВКР могут быть использованы при проведении уроков математики в 10-11 классах основной школы

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. GeoGebra [Электронный ресурс] : Графический калькулятор для функций, геометрии, статистики и 3D геометрии. – Режим доступа: http://www.geogebra.com.

2. Бененсон, Е. П. Информатика и ИКТ : учебник для 4 класса / Е. П. Бененсон, А. Г. Паутова. – Москва : Академкнига, 2013. – 95 с.

3. Босова, Л. Л. Информатика и ИКТ : учебник для 5 класса / Л. Л. Босова, А. Ю. Босова. – Москва: Бином, 2013. – 180 с.

4. Босова, Л. Л. Информатика и ИКТ : учебник для 6 класса / Л. Л. Босова,ТА. Ю. Босова. – Москва: Бином, 2013. – 208 с.

5. Босова, Л. Л. Информатика и ИКТ : учебник для 7 класса / Л. Л. Босова, А. Ю. Босова. – Москва : Бином, 2013. – 218 с.

6. Босова, Л. Л. Информатика и ИКТ: учебник для 8 класса / Л. Л. Босова, А. Ю. Босова. – Москва : Бином, 2013. – 158 с.

7. Босова, Л. Л. Информатика и ИКТ : учебник для 9 класса / Л. Л. Босова, А. Ю. Босова. – Москва : Бином, 2013. – 175 с.

8. Булавин, Л. А. Компьютерное моделирование физических систем : учебное пособие / Л. А. Булавин, Н. В. Выгорницкий, Н. И. Лебовка. – Москва : Интеллект, 2011. – 352 с.

9. Быкадоров, Ю. А. Информатика и ИКТ : учебник для 8 класса / Ю. А. Быкадоров. – Москва : Дрофа, 2012. – 287 с.

10. Быкадоров, Ю. А. Информатика и ИКТ : учебник для 9 класса / Ю. А. Быкадоров. – Москва : Дрофа, 2013. – 334 с.

11. Гейн, А. Г. Информатика и ИКТ : учебник для 10 класса / А. Г. Гейн, А. Б. Ливчак, А. И. Сенокосов. – Москва : Просвещение, 2012. – 268 с.

12. Гейн, А. Г. Информатика и ИКТ : учебник для 11 класса / А. Г. Гейн, А. Б. Ливчак, А. И. Сенокосов. – Москва : Просвещение, 2009. – 329 с.

13. Гейн, А. Г. Информатика и ИКТ : учебник для 9 класса / А. Г. Гейн. – Москва: Просвещение, 2012. – 268 с.

14. Демоверсии, спецификации, кодификаторы [Электронный ресурс] : Демонстрационный вариант ОГЭ по информатики от 2017 года // Федеральный институт педагогических измерений. – Режим доступа: http://www.fipi.ru.

16. Казакова, Е. В. Введение в среду GeoGebra [Электронный ресурс] / Е. В. Казакова // КГПУ им. В. П. Астафьева. – 2015. – С. 28-30. – Режим доступа: http://elibrary.ru/

17. Комиссарова, С. А. Элективный курс по информатике как средство организации исследовательской деятельности обучающихся / С. А. Комиссарова, В. В. Писарева // Информатика в школе. – Москва, 2013. – №10. – С. 22-36.

20. Кудина, Е. С. О возможности использования Microsoft Mathematics и GeoGebra на учебных занятиях / Е. С. Кудина // Информация и образование: границы коммуникаций / ФГБОУ ВПО Горно-Алтайский государственный университет. – 2014. – №6. – С. 348-351.

21. Лапчик, М. П. Методика преподавания информатики : учебное пособие для студентов пед. вузов / М. П. Лапчик, И. Г. Семакин, Е. К. Хеннер. – Москва: Академия, 2003. – 624 с.

22. Левченко, И. В. Учебно-методический материал по темам «Аппаратное и программное обеспечение компьютера» и «Информационное моделирование» / И. В. Левченко, О. Ю. Заславская // Информатика в школе. – Москва , 2012. –№7. – С. 23-44.

24. Майер, Р. В. Компьютерное моделирование [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для студентов педагогических вузов. – Глазов, 2015. – Режим доступа: http://www.maier-rv.glazov.net/Komp_model.htm.

25. Макарова, Н. В. Информатика и ИКТ : практикум для 8-9 класса / Н. В. Макарова. –Санкт-Петербург : Питер, 2010. – 379 с.

26. Макарова, Н. В. Информатика и ИКТ : учебник для 8-9 класса /

Н. В. Макарова. –Санкт-Петербург : Питер, 2010. – 406 с.

27. Матвеева, Н. В. Информатика и ИКТ : учебник для 4 класса / Н. В. Матвеева, Е. Н. Челак, Н. К. Конопатова, Л. П. Панкратова, Н. А. Нурова. – Москва : Бином, 2008. – 227 с.

28. Могилев, А. В.Информатика : учебник для 4 класса в 2 томах / А. В. Могилев, М. Н. Могилева, М. С. Цветкова. – Бином, 2014. – 256 с.

30. Плаксин, М. А. Информатика : учебник для 4 класс в 2 томах / М. А. Плаксин, Н. Г Иванова О. Л. Русакова –Бином, 2012. –252 с.

32. Поляков, К. Ю. Информатика и ИКТ : учебник для 9 класса, часть 1 / К. Ю. Поляков. –Москва : Бином, 2013. –235 с.

34. Примерная основная образовательная программа основного общего образования [Электронный ресурс] : протокол от 8 апреля 2015 г. № 1/15 // Министерство образования науки РФ. – Режим доступа: http://www.минобрнауки.рф

35. Семакин, И. Г. Информатика и ИКТ : учебник для 10 класса / И. Г. Семакин, Е. Е. Хеннер. – Москва : Бином, 2012. – 242 с.

36. Семакин, И. Г. Информатика и ИКТ : учебник для 11 класса / И. Г. Семакин, Е. Е. Хеннер, Е. К. Шеина. – Москва : Бином, 2014. – 224 с.

37. Семакин, И. Г. Информатика и ИКТ : учебник для 7 класса / И. Г. Семакин, Л. А. Залогова, С. В. Русаков, Л. В. Шестакова. – Москва : Бином, 2012. – 166 с.

38. Семакин, И. Г. Информатика и ИКТ : учебник для 8 класса / И. Г. Семакин, Л. А. Залогова, С. В. Русаков, Л. В. Шестакова. – Москва : Бином, 2005. – 168 с.

39. Семакин, И. Г. Информатика и ИКТ : учебник для 9 класса / И. Г. Семакин, Л. А. Залогова, С. В. Русаков, Л. В. Шестакова. – Москва : Бином, 2012. – 335 с.

40. Семёнов, А. Л. Информатика : учебник для 3-4 классов в 3 томах / А. Л. Семенов, Рудченко Т. А. – Москва : Просвещение, 2013. – 106 с.

41. Сухих, Н. А Поурочные планы по учебникам Семакина И. Г. и

Угриновича Н.Д : учебник для 9 класса / Н. А. Сухих. – Москва : Бином, 2012. – 271 с.

43. Угринович, Н. Д. Информатика и ИКТ : учебник для 9 класса / Н. Д. Угринович. – Москва : Бином, 2012. – 292 с.

44. Угринович, Н. Д. Информатика и ИКТ : учебник для 7 класса / Н. Д. Угринович. – Москва: Бином, 2010. – 168 с.

45. Угринович, Н. Д. Информатика и ИКТ: учебник для 8 класса / Н. Д. Угринович. – Москва : Бином, 2005. – 102 с.

46. Федеральный перечень учебников [Электронный ресурс] : приказ от 31 е обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием GeoGebra : дис. канд. пед. наук : 13. 00. 02 / Ширикова Татьяна Сергеевна. – Архангельск, 2014. – 204 с.