Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЛЕСОСИБИРСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал Сибирского федерального университета

Физико-математический
факультет

Высшей математики, информатики и естествознания
кафедра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

44.03.05 Педагогическое образование
44.03.05.06 Математика и информатика
код и наименование, направления, подготовки, специальности

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ 10-11 КЛАССОВ
тема

Руководитель — подпись — Е. Н. Яковлева (инициалы, фамилия)

Выпускник — подпись — М. Б. Вологжанина (инициалы, фамилия)

Лесосибирск 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЛЕСОСИБИРСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал Сибирского федерального университета

Физико-математический
факультет

Высшей математики, информатики и естествознания
кафедра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

44.03.05 Педагогическое образование
44.03.05.06 Математика и информатика
код и наименование направления, подготовки, специальности

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ 10-11 КЛАССОВ

тема

Работа защищена «22» июня 20 17 г. с оценкой «отлично»

Председатель ГЭК	подпись	С. С. Аплеснин инициалы, фамилия
Члены ГЭК	подпись	Е. В. Киргизова инициалы, фамилия
	подпись	Е. Н. Яковлева инициалы, фамилия
	подпись	А. М. Гилязутдинова инициалы, фамилия
	подпись	И. А. Падалко инициалы, фамилия
Руководитель	подпись	Е. Н. Яковлева инициалы, фамилия
Выпускник	подпись	М. В. Вологжанина инициалы, фамилия

Лесосибирск 2017

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Методика изучения темы «Вписанные и описанные четырехугольники» в курсе математики 10-11 классов» содержит 59 страниц текстового документа, 35 рисунков, 41 использованный источник.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ВПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ОКРУЖНОСТЬ, ЦЕНТР ОКРУЖНОСТИ, ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС.

Объект исследования: процесс обучения математике.

Предмет исследования: методика изучения темы «Вписанные и описанные четырехугольники» в 10-11 классах.

Цель работы: рассмотреть методику изучения темы «Вписанные и описанные четырехугольники» в курсе математики средней школы и разработать элективный курс по теме «Критерии вписанных и описанных четырехугольников» для учащихся 10-11 классов.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Провести сравнительный анализ школьных учебников геометрии по данной теме;
2. Рассмотреть методику обучения учащихся решению задач по теме «Вписанные и описанные четырехугольники» на уроках математики;
3. Разработать элективный курс для повышения практических умений учащихся в решении задач с применением критериев вписанного и описанного четырехугольников.

Материалы выпускной работы могут быть использованы учителями и учениками при организации обучения математике в средней школе, а также при подготовке к единому государственному экзамену и олимпиаде по математике.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математическое образование, получаемое в школе, является важнейшим компонентом общего образования и общей культуры человека. Учебный предмет «Математика» уникален в деле формирования личности. Образовательный, развивающий потенциал математики огромен. Не случайно ведущей целью математического образования является интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, необходимых человеку для полноценной жизни в обществе. Математика выступает именно как предмет общего образования, который позволяет наделять подрастающего человека способностями, необходимыми для свободной и безболезненной адаптации его к условиям жизни в современном обществе. Математика в школе служит опорным предметом для изучения смежных дисциплин.

Статистические данные анализа результатов проведения ЕГЭ говорят о том, что наименьший процент верных ответов традиционно дается учащимися на геометрические задачи.

Задачи по планиметрии, включаемые в КИМы ЕГЭ, можно сгруппировать по следующим основным темам:

– треугольники;

– четырехугольники (параллелограмм и трапеция);

– окружности, вписанные в треугольник и описанные около треугольника;

– окружности, вписанные в четырехугольник и описанные около четырехугольника.

Тема «Вписанные и описанные четырехугольники» является одной из основных в курсе геометрии 7 - 9 классов. Однако ее изучение ограничивается вписанными и описанными треугольниками и правильными многоугольниками. И совершенно очевидно, что для успешного выполнения заданий, входящих во вторую часть экзаменационной работы ЕГЭ за курс средней школы, нужна специальная подготовка, требуются твердые знания основных геометрических фактов и некоторый опыт в решении геометрических задач.

Эта проблема обусловила тему выпускной квалификационной работы: «Методика изучения темы «Вписанные и описанные четырехугольники» в курсе математики 10-11 классов».

Объект исследования: процесс обучения математике.

Предмет исследования: методика изучения темы «Вписанные и описанные четырехугольники» в 10-11 классах.

Цель работы: рассмотреть методику изучения темы «Вписанные и описанные четырехугольники» в курсе математики средней школы и разработать элективный курс по теме «Критерии вписанных и описанных четырехугольников» для учащихся 10-11 классов.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

4. Провести сравнительный анализ школьных учебников геометрии по данной теме;
5. Рассмотреть методику обучения учащихся решению задач по теме «Вписанные и описанные четырехугольники» на уроках математики;
6. Разработать элективный курс для повышения практических умений учащихся в решении задач с применением критериев вписанного и описанного четырехугольников.

Методологической основой выступают труды педагогов и ученых:
И. Ф. Шарыгин [36, 38], Э. Г. Готман [9], В. Е. Куценок [26, 27].

Для решения поставленных задач использовались следующие **методы**: изучение и анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования; анализ учебных программ; изучение опыта работы преподавателей и учителей школ; беседа; внедрение элективного курса в учебный процесс.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что систематизирован большой объем материала по теме «Вписанные и описанные четырехугольники», выделены критерии вписанных и описанных четырехугольников.

Практическая значимость работы состоит в том, что разработан, внедрен и апробирован элективный курс, который могут использовать учителя и ученики при подготовке к единому государственному экзамену по математике.

Структура работы обусловлена целью и задачами исследования.

Введение раскрывает актуальность, определяет объект, предмет, цель, задачи, методы исследования, теоретическую и практическую значимость работы.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников (41).

В первой главе представлен сравнительный анализ школьных учебников геометрии по теме «Вписанные и описанные четырехугольники»; а также рассматривается методика обучения учащихся решению задач по этой теме на уроках математики в средней школе. Во второй главе представлен элективный курс «Критерии вписанных и описанных четырехугольников» для 10-11 классов.

В заключении подводятся итоги исследования, формируются окончательные выводы по рассматриваемой теме.

По теме исследования опубликованы следующие статьи:

1. Вологжанина, М. Б. Признаки вписанных четырехугольников / М. Б. Вологжанина // Наука в современном мире : сб. статей Международной науч.-практической конференции (19 февраля 2015 г., г. Стерлитамак). – Стерлитамак : РИЦ АМИ, 2015. – С. 17–19.
2. Вологжанина, М. Б. Факультативные занятия по теме «Вписанные четырехугольники» / М. Б. Вологжанина // Сборник статей IX Международной науч.-практической конференции «Наука в современном обществе : закономерности и тенденции развития» (Пермь, 25.02.2017 г.). – Пермь : Аэтерна, 2017.

3. Вологжанина, М.Б. Критерии вписанного четырехугольника / М. Б. Вологжанина // Новая наука : От идеи к результату : Международное научное периодическое издание по итогам Международной науч.-практической конференции (29 мая 2016 г, г. Сургут) / в 3 ч. Ч.2. – Стерлитамак : АМИ, 2016. – С. 22–25.

Глава 1 МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ»

1.1 Сравнительный анализ темы «Вписанные и описанные четырехугольники» в школьных учебниках геометрии

Проведем анализ теоретического, задачного материала по данной теме. Для исследования были рассмотрены учебники геометрии, рекомендованные Министерством Образования и Науки Российской Федерации к применению в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях. Это учебники: Атанасян Л. С. и др. «Геометрия 7-9» [7]; Шарыгин И. Ф. «Геометрия 7 - 9» [36]; Александров А. Д. и др. «Геометрия 7, 8, 9» [1]; Погорелов А. В. «Геометрия 7 - 9» [29] (учебники, выпущенные Министерством Образования и Науки РФ к использованию в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях на 2016/2017 учебный год). А также рассмотрен учебник под редакцией Смирновой И. М. «Геометрия 7 - 9» [35].

Наиболее подробно тема «Вписанные четырехугольники» изложена в учебнике Ивана Федоровича Шарыгина в параграфе 8.5 «Вписанные и описанные четырехугольники». В остальных учебниках таких параграфов нет.

Понятие вписанных и описанных четырехугольников вводится в 8 классе. Параграф начинается с определений:

Четырехугольник называется ***вписанным***, если его вершины расположены на одной окружности.

Четырехугольник называется ***описанным***, если все его стороны касаются одной окружности.

Далее в пункте «Вписанный четырехугольник» для рассмотрения предлагается теорема с доказательством.

Теорема **8.5** (*свойства и признаки вписанного четырехугольника*): Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был вписанным, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий:

а) $ABCD$ – выпуклый четырехугольник и $\angle ABD = \angle ACD$;

б) сумма двух противоположных углов четырехугольника равна 180°.

Сразу же после параграфа представлен материал, относящийся к практической части по данной теме: задачи, задания, вопросы. Представим некоторые задания, дополняющие теорию.

1082 (в). Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность, *P* – точка пересечения диагоналей четырехугольника. Докажите, что $AP \cdot PC = BP \cdot PD$.

1083 (в). Докажите утверждение, обратное утверждению задачи 1082.

В **учебнике геометрии под редакцией Л. С. Атанасяна** нет отдельных разделов «Вписанные и описанные четырехугольники». О них говорится в параграфе 4 «Вписанная и описанная окружность» главы XIII.

В пункте 75 «Описанная окружность» сначала делается замечание, что в отличие от треугольника около четырехугольника не всегда можно описать окружность.

И далее приводится разъяснение: Например, нельзя описать окружность около ромба, не являющегося квадратом. Если же около четырехугольника можно описать окружность, то его углы обладают следующим свойством:

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Также верно и обратное утверждение:

Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Практический материал в данном учебнике содержится сразу же после изучаемого параграфа, что является очень удобным. Задачи в основном на вычисление.

Как и в учебнике геометрии А. В. Атанасяна в учебнике **под редакцией А. Д. Александрова** нет отдельного параграфа. Параграф «Вписанные и описанные окружности» делится на несколько пунктов. В пункте «Окружность, описанная около многоугольника» говорится о том, что около многоугольника можно описать окружность, если найдется точка, равноудаленная от всех его вершин. Эта точка лежит на серединном перпендикуляре каждой стороны многоугольника. Следовательно, около многоугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры всех его сторон имеют общую тоску. Эта точка и будет центром описанной окружности (см. рисунок 1).

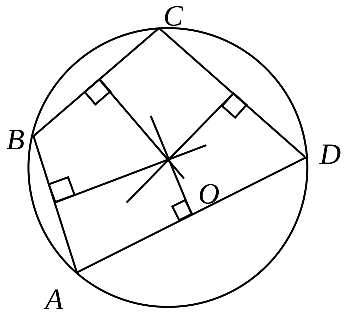

Рис. 1

Около каждого треугольника можно описать окружность. Но не около каждого даже выпуклого четырехугольника можно описать окружность. Например, для параллелограмма это можно сделать лишь тогда, когда параллелограмм является прямоугольником (см. рисунок 2).

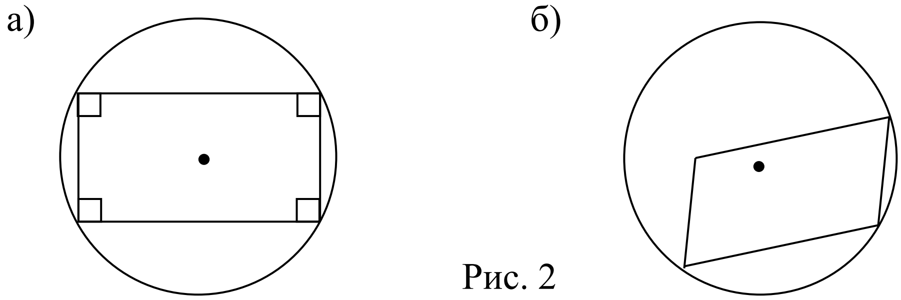

Рис. 2

Остальные признаки и свойства предлагают вывести или доказать самостоятельно в задачах. Практический материал относится ко всему параграфу, а не разделен по пунктам. Все задачи разбиваются на ряд разделов, которые содержат задачи, дополняющие теорию, на вычисление, на доказательство, задачи на исследование и олимпиадные задачи.

В учебнике **под редакцией И. М. Смирновой** о вписанных и описанных четырехугольниках говорится в главе VI «Многоугольники и окружность». Однако, в параграфе 36 «Многоугольники, вписанные в окружность» свойство вписанного четырехугольника вводят в качестве примера (условие задачи с решением):

Докажите, что если около четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.

Решение: Пусть *ABCD* – четырехугольник, около которого описана окружность. Докажем, что $\angle B + \angle D = 180^{\circ}$. Действительно, эти углы измеряются половинами соответствующих дуг *ADC* и *ABC*, которые вместе составляют всю окружность. Следовательно, сами углы в сумме измеряются половиной дуги окружности, т.е. их сумма равна 180°.

Некоторые свойства и признаки вписанных четырехугольников требуется вывести самостоятельно решая задачи, относящиеся к данному параграфу.

Например, задача 11: Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность радиусом 6 см.

13. Можно ли описать окружность около: а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) ромба; г) квадрата; д) равнобедренной трапеции; е) прямоугольной трапеции?

18. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 20 см, средняя линия 5 см. найдите боковые стороны трапеции.

22. Докажите, что если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

23. Докажите, что если из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, опустить перпендикуляры на его стороны или их продолжения, то основания этих перпендикуляров будут принадлежать одной прямой (прямая Симсона).

В учебнике **геометрия А. В. Погорелова** такая тема как «Вписанные и описанные четырехугольники» не рассматривается, кроме вписанного квадрата, который рассматривается в параграфе 13 в качестве правильного многоугольника.

Доказательства теорем в данных учебниках приводятся в готовом виде.

Данные учебники имеют значительные различия. В учебнике под редакцией И. Ф. Шарыгина [36] на изучение в 8 классе темы «Вписанные и описанные четырехугольники» отводится 4 часа. В учебнике Л. С. Атанасяна [7] на изучение в 8 классе этой темы отводится всего лишь 2 часа. В учебниках А. Д. Александрова [1] и И. М. Смирновой [35] на изучение этой темы отводится также не более 3 часов.

Практические задания темы «Вписанные и описанные четырехугольники», предлагаемые в учебниках И. М. Смирновой [35], Л. С. Атанасяна [7] и И. Ф. Шарыгина [36], в отличие от учебников под редакцией А. В. Погорелова [29] и А. Д. Александрова [1], располагаются в конце каждого пункта после изученного материала. В учебнике под редакцией Л. С. Атанасяна [7] в конце главы имеется список заданий, предлагаемых с целью обобщения темы. Он включает задания повышенной сложности, а также интересные задания для детей, интересующихся математикой. В учебнике под редакцией А. Д. Александрова [1] сначала изучается весь теоретический материал по теме «Вписанные и описанные четырехугольники», и только в конце главы представлен список практических заданий по изученной теме.

Что касается оформления, то учебник под редакцией Л. С. Атанасяна [7] отличается достаточной красочностью и количеством наглядностей. Однако, сравнивая с учебником И. Ф. Шарыгина [36], чертежи в учебнике Л. С. Атанасяна [7] меньшего масштаба, что порой доставляет неудобства.

Проанализировав способы подачи материала в учебниках, можно сделать вывод, что учебники под редакцией И. М. Смирновой [35] и А. Д. Александрова [1] изучают рассматриваемые темы более глубоко, однако многие из них написаны непонятным для школьников языком, что вызывает затруднения при их изучении. Более легкая трактовка определений и доказательств теорем представлена в учебнике под редакцией И. Ф. Шарыгина. Материал усваивается легче, в сравнении с другими учебниками, в которых объем часов, отведенных на изучение данных тем, меньше, чем в учебнике И. Ф. Шарыгина [36].

Анализ школьных учебников показал, что рассмотрение этой темы в том объеме, который описан в учебниках, явно недостаточно для решения задач типа 16 (С4). Следовательно, возникает необходимость в рассмотрении дополнительного материала по данной теме, т.е. необходимость в разработке и проведении элективных занятий.

1.2 Методика обучения учащихся решению задач по теме «Вписанные и описанные четырехугольники»

Признаки и свойства вписанных и описанных четырехугольников – мощный аппарат для решения задач. Эта тема неизменно приковывает внимание учителей и методистов, пытающихся снять трудности темы с помощью расширяющегося методического аппарата.

Анализ решения задач по теме позволяет классифицировать их по уровню сложности следующим образом:

1. Задачи на доказательство, что около четырехугольника можно описать окружность (в четырехугольник можно вписать окружность);
2. Задачи на доказательство и вычисление;
3. Задачи на метод вспомогательной окружности.

Приведенная классификация задач по уровню сложности определяет последовательность в подборе системы задач на тему «Вписанные и описанные четырехугольники». Однако, она лишь в очень ограниченной мере вскрывает операционный состав действия решения таких задач.

Чтобы помочь учащимся овладеть сложным умением решать задачи с помощью свойств и признаков вписанных и описанных четырехугольников, необходимо проанализировать, из каких операций состоит это умение.

Согласно теории деятельности, каждая операция, которая присутствует в действии, предварительно сама должна быть развернутым действием с наличием соответствующей цели. Это действие необходимо специально формировать. Поэтому далее, одновременно с выделением операций, из которых состоит действие решения задач с помощью вписанных и описанных четырехугольников, предлагаются примеры заданий по формированию этих операций, а учитель сможет найти им место в процессе обучения, а также при необходимости составить подобные. Часть заданий может быть выполнена заблаговременно, до изучения признаков и свойств, а часть – войдет в систему задач, решаемых в теме. Такими операциями являются следующие.

1. Выделение в задаче условия и заключения. Подсчет количества данных и требований. Последняя рекомендация особенно эффективна в начале процесса обучения решению задач. Если в курсе арифметики такая работа не проводилась, то в курсе геометрии она необходима для самоконтроля, для выполнения последующей операции – получения следствий. При этом следует делать упор не на числовых данных задачи, а на величинах, входящих в текст задачи и на соотношениях между ними, на количестве рассматриваемых в задаче ситуаций. Тем самым организуется проникновение в структуру задачи и удерживается в памяти условие задачи, без чего невозможна дальнейшая актуализация знаний.

ПРИМЕР. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Через эти точки проведены соответственно пересекающиеся прямые *CD* и *EF* таким образом, что *C* и *E* – точки первой окружности, а *D* и *F* – точки второй окружности. Доказать, что отрезок *CE* параллелен отрезку *DF* (см. рисунок 3).

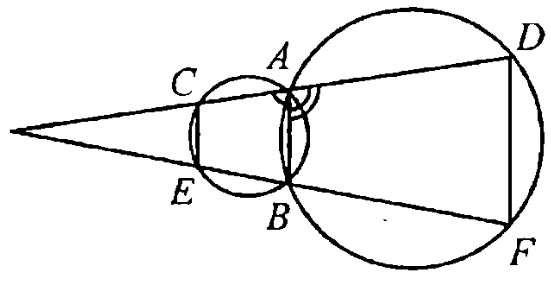

Рис. 3

В результате анализа условия задачи получается запись:

Дано: 1) ω_1, ω_2 – окружности; 2) $\omega_1 \cap \omega_2 = A, B$; 3) *CD, EF* – прямые; 4) $A \in CD, B \in EF$; 5) $C, E \in \omega_1; D, F \in \omega_2$.

Доказать: $CE \parallel DF$.

Такой работе над условием задачи, к сожалению, специального внимания не уделяется. Предполагается, что ученик овладевает ею в процессе выполнения более сложной деятельности решения задач. А это действие требует специальной отработки, корректировки и оценивания.

2. Перевод в тексте задачи обычной речи на математический язык геометрической модели (чертежа), на язык понятий и отношений. Перевод может иметь место как в данных, так и в требовании задачи.

При этом следует иметь в виду, что различные обороты речи, имеющие одну и ту же математическую суть, поначалу воспринимаются учащимися как имеющие разный смысл.

С учащимися необходимо разобрать ситуации типа: четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω; около четырехугольника $ABCD$ описана окружность ω; точки A, B, C, D принадлежат окружности ω; точки A, B, C, D равноудалены от точки O. Необходимо также разобрать ситуацию: точка O делит отрезок AB пополам, точка O – середина отрезка, AO – половина AB, AB больше OB (OA) в 2 раза и выяснить, что смысл их – один и т.д. При этом задания могут быть взаимно-обратного характера: изобразить ситуацию на чертеже или словами (в различной форме) описать ситуацию, изображенную на чертеже.

3. Замена математических понятий отношениями, содержащимися в определении понятия.

Задание для учащихся: объясните, что означает тот факт, что четырехугольник $ABCD$ – вписанный; точки A, B, M и K расположены на окружности с диаметром AB и т.д. Операция замены понятий отношениями, свойствами, содержащимися в определении, имеет место на стыке двух этапов процесса решения задачи: это еще анализ условия и уже поиск решения.

4. Получение ближайших следствий из условия задачи. Такими следствиями могут быть предыдущая операция – замена терминов отношениями; приведение свойств понятий, содержащихся и не содержащихся в определении, а также получение следствий сразу из нескольких составных частей условия. Операция получения следствий может быть представлена различными граф-схемами (см. рисунок 4).

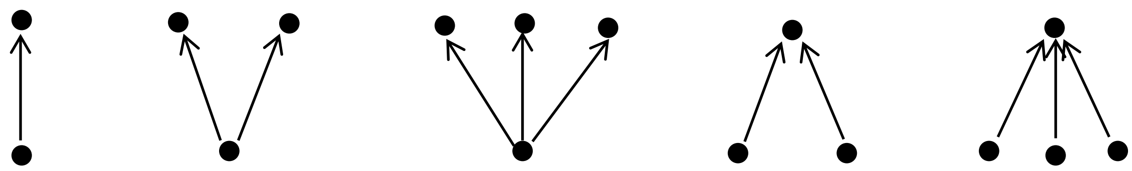

Рис. 4

Точки нижнего ряда изображают отдельные составляющие условия, а точки верхнего ряда – полученные из них следствия. Тогда первая схема моделирует наличие одного вывода из одного условия (четырехугольник *ABCD* – описанный, следовательно, $AB + CD = BC + AD$), вторая и третья схемы – получение нескольких выводов из одного условия (четырехугольник *ABCD* – вписанный, следовательно, $\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle ABD = \angle ACD$, $AP \cdot PC = DP \cdot PB$). На четвертой и пятой схемах представлены сопоставление данных и получение вывода их них ($\angle B, \angle C$ – вписанные, $\angle B = \angle C$, $\angle B$ и $\angle C$ находятся по одну сторону от прямой *AB*, следовательно, четырехугольник *ABCD* вписанный).

Упражнения на получение граф-схем – материализованной формы операции получения следствий полезно выполнять каждому учащемуся.

ПРИМЕРЫ. Получите различные следствия из следующих условий:

1. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность, диаметром которой является отрезок *AD*.
2. Равнобедренная трапеция *ABCD* с большим основанием *AD* описана около окружности.
3. Окружность касается стороны *AB* параллелограмма *ABCD*, пересекает стороны *AD* и *BC* в точках *M* и *N* соответственно и проходит через вершины *C* и *D*.

Как можно видеть, задания на получение следствий нацеливают учащихся на самостоятельное составление задач. Задания могут иметь разное продолжение. Они обучают целеполаганию – действию, без которого трудно обойтись при решении сложных практических задач.

Решая задачи полезно продемонстрировать учащимся выполнение как отдельных операций: выделение условия и заключения, замену терминов определением, получение следствий и т.д., так и в целом решение от условия к заключению и от заключения к условию. Обучение учащихся решению сложных задач с разбиением на операции дает возможность:

- привить интерес к изучаемому предмету;
- побудить учащихся к более вдумчивому изучению геометрии;
- развития критического и математического мышления;
- полнее исследовать свойства геометрических фигур;
- подметить свойство, о котором в задаче ничего не говорится;
- получить интересное обобщение задачи и др.

Глава 2 ПРОГРАММА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО МАТЕМАТИКЕ «КРИТЕРИИ ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ»

1. Пояснительная записка

Геометрия формирует абстрактное, модельное мышление, развивает математическую интуицию и формирует логику интеллекта, как высший этап его развития, формирует эстетику математики, развивает логику доказательств, последовательность интеллектуальных операций, что делает этот предмет, при всей его сложности, востребованным и важным.

Статистические данные анализа результатов проведения ЕГЭ говорят о том, что наименьший процент верных ответов обычно дается учащимися на геометрические задачи. Традиционно сложившийся школьный курс геометрии устроен так, что учащиеся большей частью заняты изучением конкретной темы и решением задач по этой теме. Поэтому можно выделить следующие недостатки в подготовке выпускников:

- формальное усвоение теоретического содержания курса геометрии;
- неумение использовать изученный материал в ситуации, которая отличается от стандартной.

Задачи по планиметрии, включаемые в КИМы ЕГЭ, можно сгруппировать по следующим основным темам:

1. Треугольники
2. Четырехугольники (параллелограмм и трапеция)
3. Окружности, вписанные в треугольник и описанные около треугольника.
4. Окружности, вписанные в четырехугольник и описанные около четырехугольника.

В КИМы включены 2 задачи по стереометрии. Разумеется, для успешного решения стереометрических задач учащиеся должны хорошо решать планиметрические задачи.

Как известно, решению геометрических задач в школе уделяется мало внимания. Тема «Вписанные и описанные окружности» изучается в конце 8 класса. Отведённого программой количества часов недостаточно, чтобы охватить огромный объём теоретического и практического материала по теме. Всё вышесказанное свидетельствует о необходимости введения дополнительного практикума.

Данный курс «Критерии вписанных и описанных четырехугольников» рассчитан на 14 часов для учащихся 10-11 классов, желающих расширить и углубить свои знания по математике и качественно подготовиться к ЕГЭ.

2. Цели и задачи курса

Цель курса:

1. Развитие устойчивого интереса учащихся к изучению математики.
2. Формирование умений решать задачи на вписанные и описанные четырехугольники.
3. Определение уровня способности учащихся и их готовности к успешной сдаче ЕГЭ.
4. Развитие графической культуры учащихся, геометрического воображения и логического мышления.
5. Воспитание понимания, что математика является инструментом познания окружающего мира.

Задачи курса:

1. Систематизировать ранее полученные знания по решению планиметрических задач на вписанные и описанные четырехугольники.
2. Познакомить учащихся с различными типами задач и способами их решения.
3. Развивать логическое мышление учащихся, обогащать и расширять математический кругозор учащихся.
4. Сформировать умения применять полученные знания при решении «нетипичных», нестандартных задач.

3. Содержание курса

№ занятия	Тема	Вид занятия	Кол-во часов
1	Критерии вписанных четырехугольников	Урок-беседа	1
2	Задачи на доказательство, что около четырехугольника можно описать окружность	Практическое занятие	1
3	Задачи на доказательство и вычисление	Практическое занятие	2
4	Метод вспомогательной окружности	Практическое занятие	3
5	Критерии описанных четырехугольников	Урок-беседа	1
6	Задачи на доказательство, что в четырехугольник можно вписать окружность	Практическое занятие	1
7	Задачи на доказательство и вычисление		2
8	Работа над проектом и его защита	Практическое занятие	2
9	Итоговое занятие		1
Итого			14

4. Планы занятий элективного курса

Занятие 1-2

Тема: Критерии вписанных четырехугольников. Задачи на доказательство, что около четырехугольника можно описать окружность

Вид урока: Объяснение нового материала

Тип урока: Беседа, практикум

Цель: Создание условий для успешного усвоения понятия вписанного четырёхугольника, его критериев и овладения умениями применять их на практике.

Задачи:

Образовательные: ввести понятия вписанного четырехугольника, изучить критерии вписанного четырехугольника (прямая и обратная теоремы), дать опыт практического применения рассмотренных критериев при решении задач.

Развивающие: развивать самостоятельность, активность, логическое мышление, навыки построения и вычисления.

***Воспитывающие*:** воспитывать математическую культуру, внимание.

План занятия:

1. Организационный момент;
2. Повторение;
3. Объяснение нового материала;
4. Решение задач;
5. Подведение итогов.

Ход занятия

Изменения в ЕГЭ 2015 года по математике, относящиеся к задаче С4 (сейчас это задание 16), уже не актуальны. Вместо многовариантных задач, которые предлагались ранее, теперь предлагаются задачи на доказательство и вычисление, т.е. решение состоит из двух частей. В рамках нашего занятия нас интересуют задачи, связанные с вписанным четырехугольником. В первой части решения такого рода задач необходимо проанализировать предложенную конфигурацию и доказать, что четыре точки лежат на окружности или что около четырехугольника можно описать окружность; во второй – используя свойства вписанного четырехугольника вычислить какую-либо величину, зная, что четырехугольник вписанный. Заметим, что для доказательства первого пункта необходимо использовать признаки вписанного четырехугольника, а при вычислениях во втором пункте – его свойства. Признаки характеризуют достаточное условие описания окружности около четырехугольника, свойства – необходимое. Теорема, характеризующая необходимое и достаточное условия, называется критерием [39:3].

Напомним предварительно некоторые важные для дальнейшего изложения теоремы, известные из школьного курса геометрии.

Основные теоремы геометрии окружности:

Теорема 1 (об измерении углов, связанных с окружностью).

а) вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается;

б) угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.

Теорема 2. Если треугольники *ABC* и *AOC* лежат по одну сторону от прямой *AC* и точка *O* – центр окружности, описанной около треугольника *ABC*, то $\angle AOC = 2\angle ABC$ (см. рисунок 5).

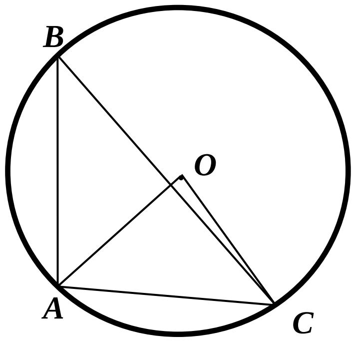

Рис. 5

Теорема 3. Если треугольники *ABC* и *AOC* лежат по одну сторону от прямой *AC*, $OA = OC$ и $\angle AOC = 2\angle ABC$, то точка *O* – центр окружности, описанной около треугольника *ABC* (см. рисунок 5).

Следствие из теоремы 1. Вписанные углы, стороны которых проходят через точки *A* и *B* окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой *AB,* равны (см. рисунок 6).

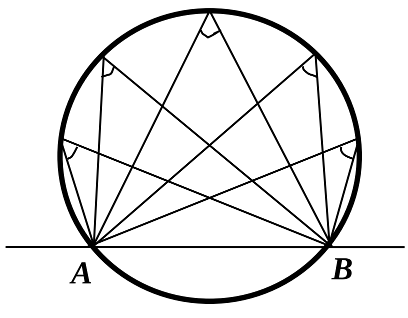

Рис. 6

В случае, когда вписанные углы равны по 90°, то используют **характеристическое свойство окружности**: отрезок АВ виден из вершин углов под прямым углом тогда и только тогда, когда эти вершины лежит на окружности с диаметром AB и отличны от точек A и B.

Теорема 4. В любой треугольник можно вписать окружность.

Теорема 5. Около любого треугольника можно описать окружность.

Теорема 6. Если из точки P к окружности проведены две секущие, пересекающие окружность в точках A, B и C, D соответственно, то $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ (см. рисунок 7).

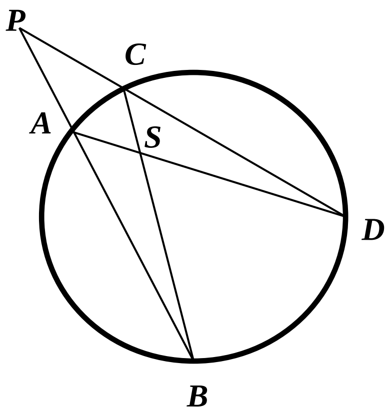

Рис.7

Теорема 7. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны (см. рисунок 8).

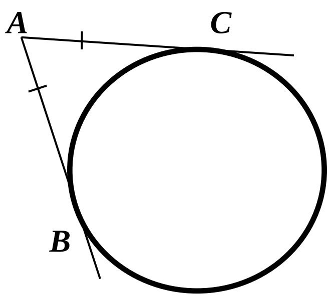

Рис. 8

Теорема 8. Из точки A, взятой вне окружности, проведены к ней касательная AB и две секущие, пересекающие окружность в точках C и D, M и N соответственно (см. рисунок 9). Тогда $AB^2 = AC \cdot AD$.

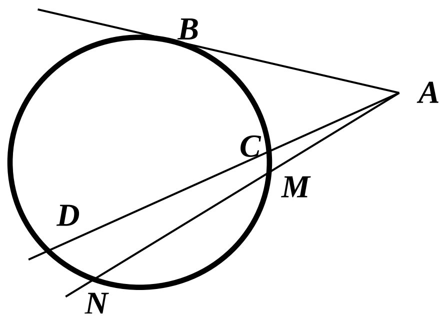

Рис. 9

Напомним, что четырехугольник *вписан в окружность,* если все его вершины лежат на этой окружности.

Заметим, что если около четырехугольника можно описать окружность, то центр её равноудален от вершин, то есть принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам четырехугольника, а так же серединным перпендикулярам и к диагоналям.

И так, рассмотрим критерии.

***Критерий* 1:** для того чтобы выпуклый четырехугольник *ABCD* был вписанным необходимо и достаточно выполнения условия $\angle ABD = \angle ACD$ (см. рисунок 10).

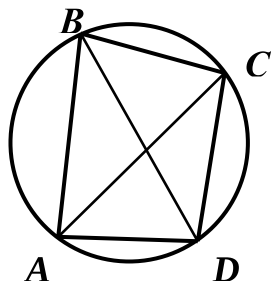

Рис.10

Если мы будем рассматривать прямую теорему, то получим свойство 1: *Если четырехугольник ABCD вписанный, то* $\angle ABD = \angle ACD$; а если обратную – то признак 1: *Если* $\angle ABD = \angle ACD$, *то четырехугольник ABCD вписан в окружность*.

***Критерий* 2:** для того чтобы выпуклый четырехугольник был вписанным, необходимо и достаточно чтобы сумма двух противоположных углов четырехугольника была равна 180° (см. рисунок 11).

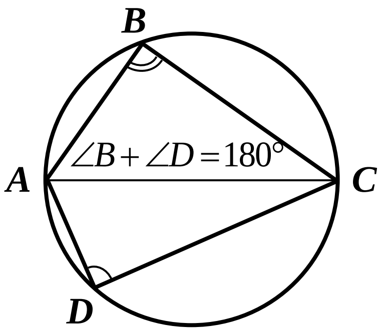

Рис. 11

Следствие: Если $\angle AMB = \angle AKB = 90°$, то точки *A*, *B*, *M* и *K* расположены на окружности с диаметром *AB*.

***Критерий* 3:** для того, чтобы точки *A*, *B*, *C*, D принадлежали окружности, необходимо и достаточно, чтобы *AC* пересекала *BD* в точке *P* и $AP \cdot PC = DP \cdot PB$ (см. рисунок 12).

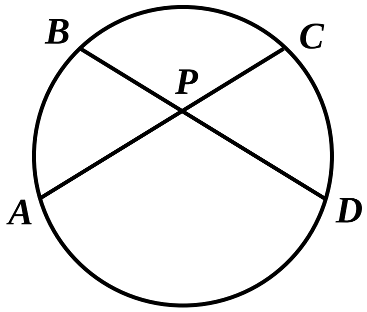

Рис. 12

В дополнение к основным признакам вписанного четырехугольника можно рассмотреть еще два «именных» - теорему Симсона и теорему Птолемея.

***Критерий* 4:** Для того чтобы четыре точки принадлежали одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы проекции одной из них на три прямые, определяемые тремя остальными точками, лежали на одной прямой.

***Критерий* 5:** Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений его противоположных сторон равнялась произведению диагоналей. $AB \cdot CD + BC \cdot AD = CA \cdot BD$.

Рассмотрим задачи.

Задача 1: В выпуклом четырехугольнике *ABCD* диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*. $\angle ABC = 111^\circ$, $\angle OBC = 49^\circ$, $\angle ACD = 62^\circ$. Доказать, что точки *A, B, C, D* принадлежат одной окружности.

Решение: $\angle ABO = 111^\circ - 49^\circ = 62^\circ$. Таким образом, *B* и *C* лежат по одну сторону от *AD* и углы *ABO* и *ACD* равны, значит точки *A, B, C, D* лежат на одной окружности (см. рисунок 13).

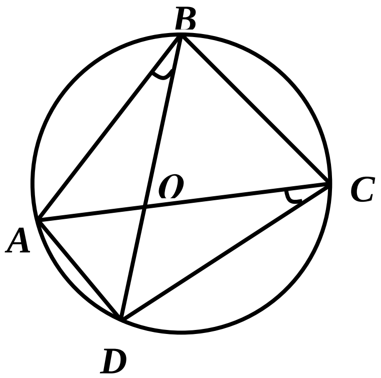

Рис. 13

Задача 2 [17]: Биссектрисы углов выпуклого четырехугольника *ABCD* образуют выпуклый четырехугольник *KLMN*. Доказать, что около четырехугольника *KLMN* можно описать окружность.

Решение: В четырехугольнике *ABCD* имеем

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ.$$

В четырехугольнике *KLMN*: $\angle L = 180^\circ - 0{,}5(\angle B + \angle C)$,

$$\angle N = 180^\circ - 0{,}5(\angle A + \angle D)$$

$$\angle L + \angle N = 180^\circ$$

Значит, по ***признаку 2*** около четырехугольника *KLMN* можно описать окружность (см. рисунок 14).

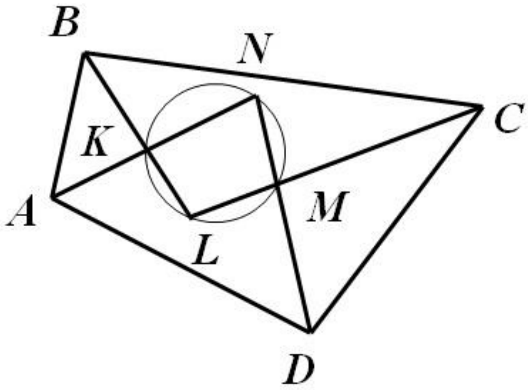

Рис. 14

Задача 3 [16, 66]: Две окружности имеют общую хорду CD. Через точку M этой хорды проведены хорды AB и EF, принадлежащие различным окружностям и не лежащие на одной прямой. Доказать, что концы этих двух хорд лежат на одной окружности.

Решение: Из ω1 (по свойству 3): $AM \cdot MB = CM \cdot MD$;

Из ω2 (по свойству 3): $EM \cdot MF = CM \cdot MD$.

Из этого следует, что $AM \cdot MB = EM \cdot MF$. Откуда можно сделать вывод, что точки *A, B, E, F* принадлежат одной окружности (по признаку 3) (см. рисунок 15).

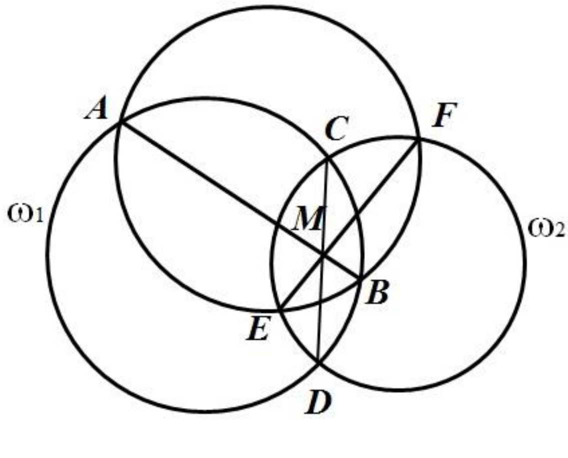

Рис. 15

Занятие 3

Тема: Задачи на доказательство и вычисление.

Тип урока: Урок-практикум

Цель: Сформировать умения применять свойства и признаки вписанного четырехугольника на практике.

Задачи:

***Образовательные*:** Способствовать формированию умения применять изученные свойства и признаки на практике.

***Развивающие*:** Развитие математических способностей, создание условий для умения обобщать и применять прямой и обратный ход мыслей.

***Воспитательные*:** Воспитание чувства красоты эстетикой чертежей, формирование организованности, ответственность за результаты своего труда.

План занятия:

1. Организационный момент;
2. Повторение;
3. Решение задач;
4. Подведение итогов.

Ход занятия

Задача 1[15]: Дан выпуклый четырехугольник *ABCD* со сторонами *AB* = 9, *BC* = *CD* = 11, *AD* = 15 и диагональю *AC* = 16.

а) Докажите, что около него можно описать окружность;

б) Найдите BD.

Решение: Пусть $BD=x$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$, $\angle D=\varphi$.

а) Из $\Delta ABC: 16^2 = 9^2 + 11^2 - 2\cdot 9\cdot 11\cdot \cos\beta$

$$54 = -198\cos\beta$$

$$\cos\beta = -\frac{54}{198} = -\frac{27}{99} = -\frac{3}{11}$$

Из $\Delta ACD: 16^2 = 11^2 + 15^2 - 2\cdot 11\cdot 15\cdot \cos\varphi$

$$-90 = -330\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = -\frac{90}{330} = \frac{3}{11}$$

Т.к. $\cos\beta = -\cos\varphi \Rightarrow \beta + \varphi = 180^\circ$ и около $ABCD$ можно описать окружность (по признаку 2) (см. рисунок 16).

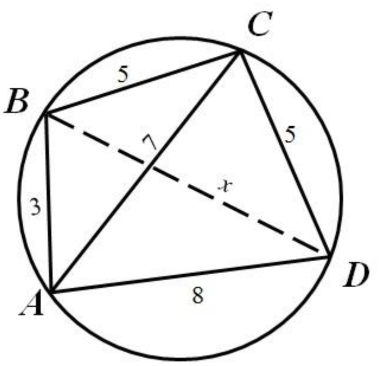

Рис. 16

б) ***1 способ:*** по теореме Птолемея $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

$$9 \cdot 11 + 11 \cdot 15 = 16 \cdot BD$$

$$264 = 16 \cdot BD$$

$$BD = 16{,}5\,.$$

2 способ:

Так как $\angle C=\gamma$, тогда по свойству 2 $\alpha = 180^\circ - \gamma$, следовательно, $\cos\alpha = -\cos\gamma$

.

По теореме косинусов из $\Delta BCD : x^2 = 11^2 + 11^2 - 2 \cdot 11^2 \cdot \cos\gamma$,

из $\Delta ABD : x^2 = 9^2 + 15^2 + 2 \cdot 9 \cdot 15 \cdot \cos\gamma$. Приравняем правые части этих выражений

$$242 - 242 \cdot \cos\gamma = 306 + 270 \cdot \cos\gamma$$

$$-512 \cdot \cos\gamma = 64$$

$$\cos\gamma = -\frac{64}{512} = -\frac{1}{8}$$

$$x^2 = 2 \cdot 11^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right),\; x = \frac{11 \cdot 3}{2} = 16{,}5\,.$$

Ответ: 16,5.

Задача 2: Около остроугольного треугольника *ABC* описана окружность с центром *O*. На продолжении отрезка *AO* за точку *O* отмечена точка *K* так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

а) Доказать, что четырехугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найти радиус окружности, описанной около четырехугольника $OBKC$, если $\cos\angle BAC = 0{,}6$, а $BC = 48$.

Решение: а) Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle OKC = \angle AKC = 90^\circ - \alpha$ и $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$ (см. рисунок 17).

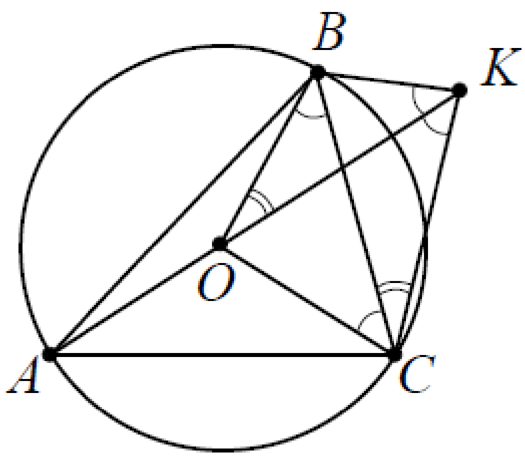

Рис. 17

Треугольник BOC равнобедренный, следовательно,

$$\angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha;$$

$$\angle OBC = \angle OKC.$$

Получаем, что точки O, B, K, C лежат на одной окружности (по признаку 1). Следовательно, четырехугольник $OBKC$ вписанный.

б) По условию $\cos\angle BAC = 0{,}6$, поэтому $\sin\angle BAC = 0{,}8$.

Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен

$$OC = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{48}{2\cdot 0{,}8} = 30.$$

Пусть R – радиус окружности, описанной около четырехугольника $OBKC$. В треугольнике OCK имеем

$$R = \frac{OC}{2\sin\angle OKC} = \frac{OC}{2\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{OC}{2\cos\alpha} = \frac{30}{2\cdot 0{,}6} = 25.$$

Ответ: 25.

Задача 3 [17, № 504546]: На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если AB=12, CH=5.

Решение: а) Предположим для определенности, что точка E лежит на катите BC, а точка K – на катите AC. Проведем отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, подобного треугольнику BCA.

Рассмотрим углы четырехугольника $ABEK$. Если $\angle ABE = \alpha$,

$$\angle BEK = \angle BEH + \angle HEK = 90^\circ + \alpha \text{, а } \angle KAB = 90^\circ - \alpha .$$

Значит,

$$\angle BEK + \angle KAB = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ .$$

Следовательно, по признаку 2 четырехугольник $ABEK$ вписан в окружность (см. рисунок 18).

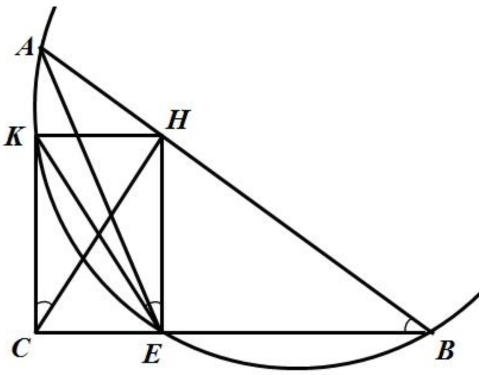

Рис. 18

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle BEA} = \frac{AB}{2\sin\angle AEC} .$$

Из подобия треугольников находим

$$\frac{CE}{CH} = \frac{AC}{AB} \text{, откуда } CE = \frac{CH \cdot AC}{AB} .$$

Тогда

$$AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = AC \cdot \sqrt{\frac{CH^2 + AB^2}{AB^2}} = \frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2 + AB^2}.$$

Поэтому

$$\sin \angle AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}}.$$

Следовательно, искомый радиус равен

$$AB = \frac{2AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{CH^2 + AB^2} = \frac{13}{2}.$$

Ответ: $\frac{13}{2}$.

Занятие 4

Тема: Метод вспомогательной окружности

Тип урока: Урок-практикум

Цели: Сформировать навыки решения задач по теме.

***Образовательные*:** Способствовать формированию умения применять изученные свойства и признаки в типовой и нестандартной ситуации.

***Развивающие*:** Развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, развитие математического мышления и интуиции, творческих способностей на уровне, необходимом для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности.

***Воспитательные*:** Воспитание чувства красоты эстетикой чертежей, формирование организованности, ответственность за результаты своего труда.

План занятия:

1. Организационный момент;
2. Повторение;
3. Решение задач;
4. Подведение итогов.

Ход занятия

В задачах, которые были предложены на прошлых занятиях, решение достаточно прозрачно и основано только на знании свойств и признаков вписанного четырехугольника. Намного сложнее, если для решения задачи вначале необходимо догадаться о принадлежности точек одной окружности.

Суть метода вспомогательной окружности заключается в том, что на чертеж к задаче, на котором трудно заметить связь между данными и искомыми величинами, вводится окружность, возможная в данной конфигурации, после чего эти связи становятся более ощутимыми или даже очевидными.

Задача 1 [17]: В остроугольном треугольнике *KMN* проведены высоты *KB* и *NA*.

а) Докажите, что угол *ABK* равен углу *ANK*.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABM*, если известно, что $KN = 8\sqrt{2}$ и $\angle KMN = 45^\circ$.

Решение: а) Углы *NAK* и *NBK*, опирающиеся на отрезок *KN*, равны (по условию), значит, точки *A, B, N* и *K* лежат на одной окружности (по признаку 1). Следовательно, равны и вписанные углы *ABK* и *ANK* этой окружности (по свойству 1), опирающиеся на дугу *AK*, что и требовалось доказать (см. рисунок 19). б) Прямоугольные треугольники *KMB* и *NMA* имеют общий угол *KMN*, следовательно, они подобны, откуда $\frac{AM}{BM} = \frac{MN}{MK}$ или $\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK}$, но тогда и треугольники *KMN* и *BMA* также подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK} = \cos\angle KMN$, откуда

$$AB = KN\cos\angle KMN = 8\sqrt{2}\cos 45^\circ = 8.$$

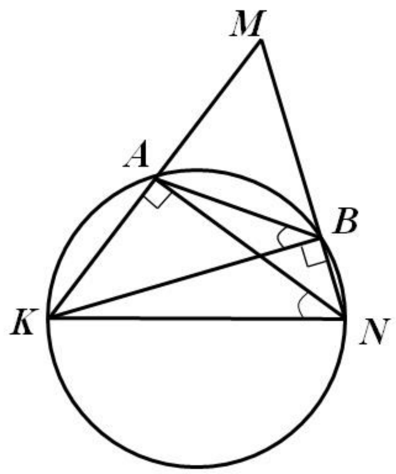

Рис. 19

Тогда радиус *R* окружности, описанной около треугольника *ABM* равен

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle AMB} = \frac{8}{2\sin 45^\circ} = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: $R = 4\sqrt{2}.$

Рассмотрим, например, решение задания 18 досрочного варианта ЕГЭ по математике от 28.03.2016 г.

Задача 2: Точка *O* – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника *ABC*, *I* – центр вписанной в него окружности, *H* – точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка *I* лежит на окружности, описанной около треугольника *BOC*.

б) Найдите угол *OIH*, если $\angle ABC = 55^\circ$.

Решение: а) Очевидно, треугольник *BOC* равнобедренный (*BO*, *OC* равны как радиусы). Пусть $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$.

Согласно условию $\angle A = 2\alpha$.

Но углы *BOC*, *BAC* – соответствующие друг другу центральный и вписанный углы, поэтому $\angle BOC = 4\alpha$. Из треугольника *BOC*:

$$6\alpha = 180^\circ,$$

откуда

$\alpha = 30^\circ$ (см. рисунок 20).

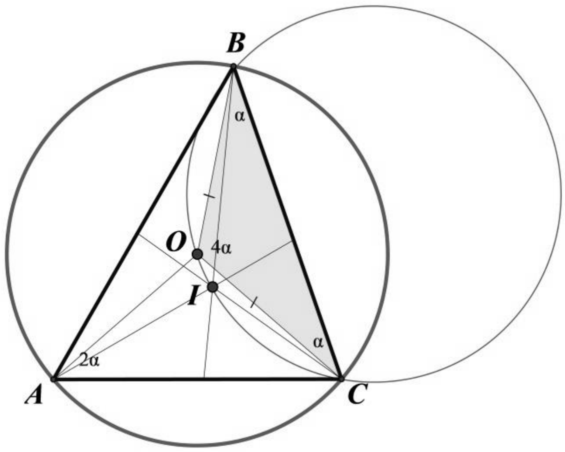

Рис. 20

Итак, $\angle A = 60^\circ, \angle BOC = 120^\circ$. На сумму углов *B*, *C* из треугольника *ABC* остается 120˚. А сумма половин углов *B*, *C* (то есть $\angle IBC + \angle ICB$) равна 60˚. Тогда в треугольнике *BIC* угол *I* равен 120˚.

Итак, $\angle BOC = \angle BIC$, а это означает, что точка *I* принадлежит окружности, описанной около треугольника *BOC* (по признаку 1).

Что и требовалось доказать.

б) Из треугольника *ABC*:

$$\angle C = 180^\circ - 60^\circ - 55^\circ = 65^\circ.$$

Пусть *Q* – основание перпендикуляра, проведенного из *B* к *AC*, *T* – основание перпендикуляра, проведенного из *C* к *AB*, *L* – основание перпендикуляра, проведенного из *A* к *BC*.

Из треугольника *BQC*:

$$\angle CBQ = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ.$$

Из треугольника *BCT*:

$$\angle BCT = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

В треугольнике *BHC*:

$$\angle H = 180^\circ - 25^\circ - 35^\circ = 120^\circ.$$

Итак, точка H, так же как и точка I, принадлежит окружности, описанной около треугольника BOC (по признаку 1) (см. рисунок 21).

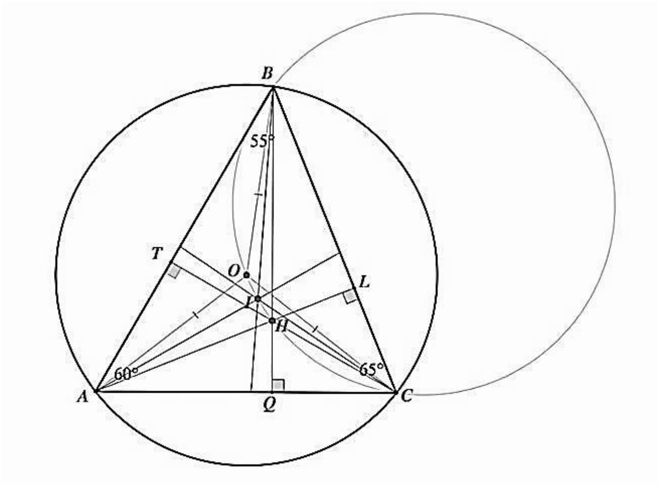

Рис. 21

Выясним, в каком порядке располагаются точки O, I, H на окружности. Заметим, что $\angle AOB = 2\angle C = 130^\circ$. Тогда $\angle BAO = \angle OBA = 25^\circ$, откуда $\angle OAC = 35^\circ$. Очевидно, $\angle IAC = 30^\circ$. Наконец, из треугольника ALC $\angle HAQ = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$. Итак, точки расположены именно в том порядке, что указан на рисунке 21 (точка I - между O и H).

Найдем градусную меру дуги OIH.

$$\angle OBH = \angle ABQ - \angle ABO = 30^\circ - 25^\circ = 5^\circ.$$

Тогда $\overset{\cup}{OIH} = 10^\circ$, так как $\angle OBH$ – вписанный угол, опирающийся на дугу OIH.

Стало быть, большая $\overset{\cup}{OH}$ равна 350˚, а именно на нее опирается вписанный угол OIH, что мы ищем. Потому $\angle OIH = 175^\circ$.

Ответ: б) 175˚.

Задача 3 [17]: Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекается в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$;

б) Найдите BC, если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

Решение: а) В четырехугольнике AC_1HB_1 углы C_1 и B_1 – прямые, следовательно, около этого четырехугольника можно описать окружность с диаметром AH (по следствию). Вписанные углы AHB_1 и AC_1B_1 опираются на одну дугу, следовательно, $\angle AHB_1 = \angle AC_1B_1$ (по свойству 1).

Углы BC_1C и BB_1C – прямые, значит, точки B, C, B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC (по следствию). Следовательно,

$$\angle AC_1B_1 = 180^\circ - \angle BC_1B_1 = \angle BCB_1.$$

Получаем, что $\angle ACB = \angle AHB_1$ (см. рисунок 22).

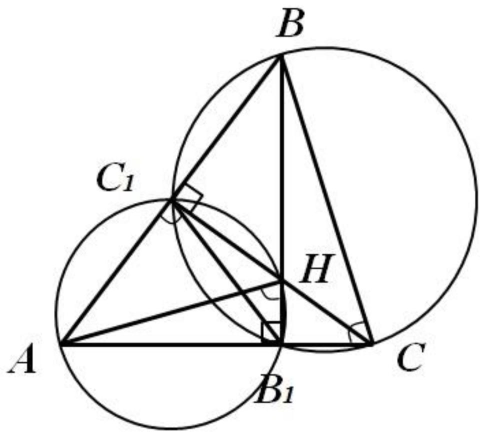

Рис. 22

б) В треугольнике AB_1C_1 диаметр описанной окружности $AH = 4$ и $\angle BAC = 60^\circ$, откуда

$$B_1C_1 = AH \cdot \sin \angle BAC = AH \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике CC_1A имеем:

$$AC_1 = AC \cdot \cos \angle CAC_1 = AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} AC.$$

Получаем, что $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$. Треугольник ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A и $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$, следовательно, они подобны. Тогда $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1} = 2$. Значит,

$$BC = 2B_1C_1 = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задача 4 [17]: Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30°. Точка E лежит вне прямоугольника, причем $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$;

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

Решение: а) По теореме о внешнем угле треугольника $\angle BOC + \angle BAO + \angle ABO = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Поэтому

$$\angle BEC + \angle BOC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Значит точки B, E, C, O лежат на одной окружности (по признаку 2). Вписанные в эту окружность углы CBE и COE опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle CBE + \angle COE$ (по свойству 1) (см. рисунок 23).

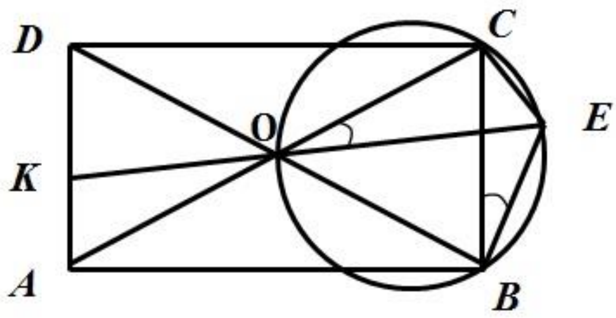

Рис. 23

б) По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{40^2 + 24^2 - 2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= 8\sqrt{25 + 9 + 15} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Вписанные углы BEO и CEO опираются на равные хорды BO и CO, значит, EO – биссектриса угла BEC. Пусть M – точка ее пересечения со стороной BC. По формуле для биссектрисы треугольника получаем:

$$EM = \frac{2BE \cdot CE \cdot \cos\frac{\angle BEC}{2}}{BE + CE} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \cos 60^\circ}{40 + 24} = 15$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{BM}=\frac{CE}{BE}=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$, значит $CM=\frac{3}{8}BC=\frac{3}{8}\cdot 56=21$, $BM=35$.

По свойству 3 $EM\cdot MO=BM\cdot CM$, откуда находим, что $OK=OM$. Следовательно, $EK=EM+2OM=15+98=113$.

Ответ: 113.

Занятие 5-6

Тема: Критерии описанных четырехугольников. Задачи на доказательство, что в четырехугольник можно вписать окружность.

Вид урока: Объяснение нового материала

Тип урока: Беседа, практикум

Цель: Создание условий для успешного усвоения понятия описанного четырёхугольника, его критериев и овладения умениями применять их на практике.

Задачи:

Образовательные: ввести понятия описанного четырехугольника, изучить критерии описанного четырехугольника (прямая и обратная теоремы), дать опыт практического применения рассмотренных критериев при решении задач.

Развивающие: развивать самостоятельность, активность, логическое мышление, навыки построения и вычисления.

***Воспитывающие*:** воспитывать математическую культуру, внимание.

План занятия:

1. Организационный момент;
2. Повторение;
3. Объяснение нового материала;
4. Решение задач;
5. Подведение итогов.

Ход занятия

Если все стороны какого-нибудь многоугольника касаются окружности, то говорят, что этот многоугольник *описан* около окружности или что окружность *вписана* в него.

***Критерий* 6:** для того, чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы биссектрисы трех его углов пересекались в одной точке [30:53].

Доказательство: так как центр окружности, вписанной в четырехугольник, равноудален от его сторон, то он принадлежит биссектрисе каждого из его углов. Следовательно, биссектрисы углов описанного четырехугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной в него окружности. Обратно, если биссектрисы трех углов четырехугольника пересекаются в одной точке, то эта точка будет равноудалена от всех его сторон, т. е. будет центром вписанной в этот четырехугольник окружности (см. рисунок 24).

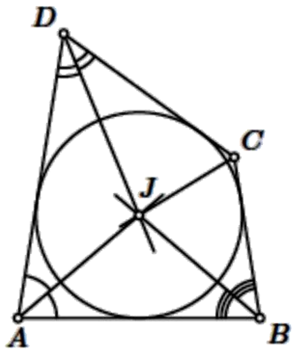

Рис. 24

Другой критерий описанного четырехугольника связан с его сторонами.

***Критерий* 7:** для этого чтобы выпуклый четырехугольник $ABCD$ являлся описанным, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны, т.е. $AB + DC = BC + AD$ [36:215].

Доказательство:

Необходимость. Пусть четырехугольник $ABCD$ является описанным. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD и DA соответственно через K, P, M и H (см. рисунок 25).

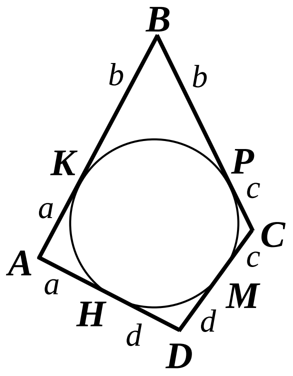

Рис. 25

Мы знаем, что касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны. Пусть $AK = AH = a$, $BK = BP = b$, $CP = CM = c$, $DM = DH = d$. Тогда $AB = a + b$, $BC = b + c$, $CD = c + d$, $DA = d + a$, а значит,
$AB + CD = a + b + c + d$, $BC + DA = b + c + d + a$, т. е. $AB + CD = BC + DA$.

Достаточность. Нам надо доказать, что если для выпуклого четырехугольника выполняется условие теоремы (равны суммы противоположных сторон), то он является описанным.

Приведем два доказательства этого утверждения.

Первое доказательство: воспользуемся методом от противного. Пусть для четырехугольника $ABCD$ выполняется условие $AB + CD = BC + DA$ (см. рисунок 26). Проведем биссектрисы углов A и B и обозначим через O точку их пересечения.

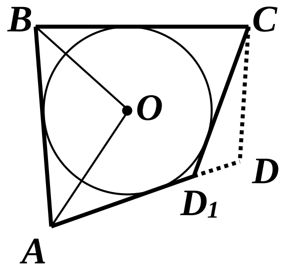

Рис. 26

Точка O равноудалена от сторон AD и AB, а также от сторон BA и BC. Значит, точка O равноудалена от трех сторон AB, AD и BC, поэтому мы можем построить окружность с центром в O, касающуюся этих трех сторон четырехугольника $ABCD$. Пусть эта окружность не касается стороны CD. Для определенности можно считать, что она не пересекает стороны CD.

Проведем через C прямую, касающуюся этой окружности, и обозначим через D_1 ее точку пересечения с AD. Имеем два четырехугольника $ABCD$ и $ABCD_1$, в каждом из которых суммы противоположных сторон равны. В первом – по условию теоремы, во втором потому, что он описанный. Запишем оба эти равенства:

$$AB + CD = BC + AD,\ AB + CD_1 = BC + AD_1.$$

Вычтем второе равенство из первого. Получим:

$$CD - CD_1 = DD_1 \text{ или } CD = CD_1 + DD_1.$$

Последнее равенство означает, что точки C, D и D_1 лежат на одной прямой, так как в противном случае оно противоречило бы неравенству треугольника. Значит, точки D и D_1 совпадают, и четырехугольник $ABCD$ является описанным.

Замечание. В геометрии (и не только в геометрии) очень важно уметь видеть различные варианты, которые могут быть в той или иной ситуации. В данном случае возник вопрос: а что будет, если построенная окружность выйдет за границы четырехугольника, т.е. пересечет сторону CD? Не может ли получиться так, что касательная к окружности, проведенная через C, либо окажется параллельной AD, либо пересечет прямую AD с другой стороны от точки A?

Покажем, что для любого выпуклого четырехугольника найдется окружность, касающаяся трех его сторон и целиком расположенная внутри него. В самом деле, если окружность касается AB, BC и AD и пересекает CD (см. рисунок 27), то окружность, касающаяся AB, BC и CD, имеет меньший радиус и целиком лежит внутри четырехугольника $ABCD$.

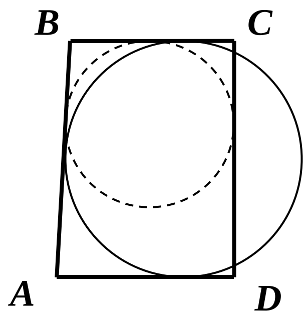

Рис. 27

Второе доказательство: докажем, что если в выпуклом четырехугольнике *ABCD* имеет место равенство *AB* + *CD* = *BC* + *AD* (см. рисунок 28), то найдется точка, равноудаленная от всех сторон этого четырехугольника.

Для этого достаточно установить, что биссектриса трех его углов, например углов *A*, *B* и *D*, пересекаются в одной точке. (Тогда точка пересечения соответствующих биссектрис равноудалена от *AB* и *AD, BA* и *BC*, *AD* и *DC*, т.е. равноудалена от всех четырех сторон.)

Пусть для определенности *AB* > *BC*. Из условия *AB* + *CD* = *BC* + *AD* следует, что *AB* – *BC* = *AD* – *CD*.возьмем на *AB* точку *K* так, что *BK* = *BC, AK* = *AB* – *BC*, а на *AD* – точку *M* такую, что *MD* = *CD, AM* = *AD* – *CD*. Как видим, *AK* = *AM*.

Поскольку треугольники *MAK*, *KBC* и *CDM* – равнобедренные с основаниями *MK*, *KC* и *CM*, биссектрисы углов *A*, *B* и *D* являются серединными перпендикулярами к отрезкам *MK*, *KC* и *CM*. Это означает, что они пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около треугольника *MKC*.

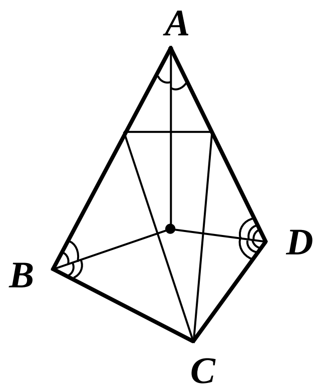

Рис. 28

Следствие: из параллелограммов описать около окружности можно только ромб (квадрат).

Это предложение вытекает из того, что у параллелограмма противоположные стороны равны и суммы этих сторон тоже должны быть равны.

Задача 1 [18, № 110862]: Окружность с центром *O*, вписанная в равнобедренный треугольник *ABC*, касается боковых сторон *AB* и *BC* в точках *P* и *Q* соответственно. Докажите, что в четырехугольник *BPOQ* можно вписать окружность.

Доказательство: Четырехугольник *BPOQ* выпуклый, *BP* = *BQ* как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки (теорема 7), а *OP* = *OQ* как радиусы одной окружности, поэтому *BP*+*OQ* = *BQ*+*OP*. Следовательно, в четырехугольник *BPOQ* можно вписать окружность (по признаку 7) (см. рисунок 29).

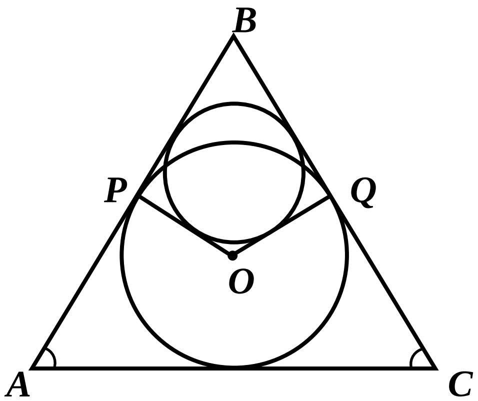

Рис. 29

Задача 2 [18 , № 110806]: На стороне *AB* остроугольного треугольника *ABC* постройте такую точку *M*, что в четырехугольник, вершины которого *C*, *M* и проекции точки *M* на стороны *CA* и *CB*, можно было вписать окружность.

Доказательство:

Предположим, что точка *M*, удовлетворяющая условию задачи, построена, а точки *P* и *Q* – её проекции на стороны соответственно *AC* и *BC* треугольника *ABC* и четырехугольник *CPMQ* – описанный. Обозначим *CP* = *x*, *CQ* = *y*, *MQ* = *z*, *MP* = *t* (см. рисунок 30).

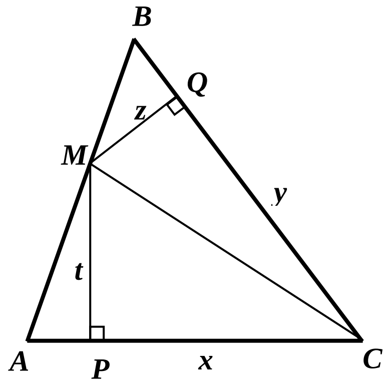

Рис. 30

Тогда $\begin{cases} x+z=y+t, \\ x^2+t^2=y^2+z^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=t-z, \\ x^2-y^2=z^2-t^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=t-z, \\ (x-y)(x+y)=(z-t)(z+t). \end{cases}$

Если $x \neq y$, то $x+y+z+t=0$, что невозможно. Значит, $x=y$. Тогда $z=t$, а из равенства прямоугольных треугольников *CPM* и *CQM* следует, что *CM* – биссектриса треугольника *ABC*. Отсюда вытекает следующее построение. Строим биссектрису *CM* треугольника *ACB*. Точка *M* равноудалена от сторон угла *ACB*, т.е. перпендикулярны *MP* и *MQ*, опущенные из этой точки на стороны *AC* и *BC* треугольника *ABC*, равны. Значит, равны прямоугольные треугольники *CMP* и *CMQ*. Следовательно, $MQ+CP=MP+CQ$, т.е. в четырехугольник *CPMQ* можно вписать окружность (по признаку 7).

Задача 3 [18, № 116034]: Диагонали выпуклого четырехугольника *ABCD* перпендикулярны и пересекаются в точке *O* (см. рисунок 31). Известно, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники *AOB* и *COD*, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники *BOC* и *DOA*. Докажите, что четырехугольник *ABCD* – описанный.

Доказательство: Пусть *AB*=*a*, *BC*=*b*, *CD*=*c*, *DA*=*d*, *AO*=*u*, *BO*=*x*, *CO*=*v*, *DO*=*y*. По формуле для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, $(u+x-a)+(y+v-c)=(x+v-b)+(u+y-d)$;

$$u+x-a+y+v-c=x+v-b+u+y-d;$$

$$-a-c=x+v-b+u+y-d-u-x-y-v;$$

$$-a-c=-b-d; \;\; a+c=b+d.$$

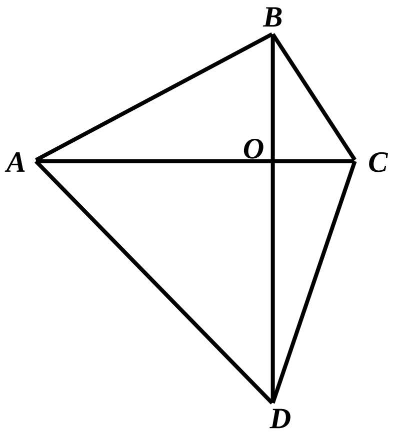

Рис. 31

Т.е. $AB + CD = BC + DA$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ – описанный (по признаку 7).

Занятие 7

Тема: Задачи на доказательство и вычисление.

Тип урока: Урок-практикум

Цель: Сформировать умения применять свойства и признаки описанного четырехугольника на практике.

Задачи:

***Образовательные*:** Способствовать формированию умения применять изученные свойства признаки на практике.

***Развивающие*:** Развитие математических способностей, создание условий для умения обобщать и применять прямой и обратный ход мыслей.

***Воспитательные*:** Воспитание чувства красоты эстетикой чертежей, формирование организованности, ответственность за результаты своего труда.

План занятия:

1. Организационный момент;
2. Повторение;
3. Решение задач;
4. Подведение итогов.

Ход занятия

Задача 1 [17, № 508205]: *O* – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника *ABCD*. Периметры треугольников *AOB, BOC, COD* и *DOA* равны между собой.

а) Докажите, что в четырехугольник *ABCD* можно вписать окружность.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *DOA*, если радиусы окружностей, вписанных в треугольники *AOB*, *BOC* и *COD* равны соответственно 3, 4 и 6.

Решение: а) Поскольку $P_{AOB} = P_{BOC} = P_{COD} = P_{DOA}$, значит $P_{AOB} + P_{COD} = P_{BOC} + P_{DOA}$, следовательно $AB + CD = BC + AD$, и четырехугольник описанный (по признаку 7).

б) Обозначим угол между диагоналями четырехугольника за α (см. рисунок 32), тогда смежный с ним будет $\pi - \alpha$.

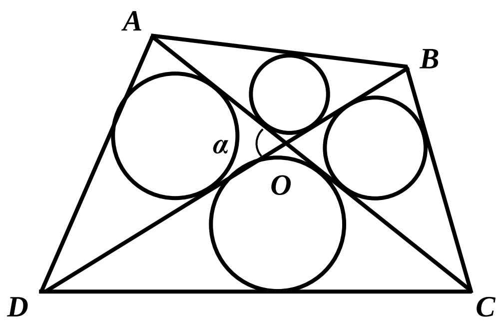

Рис. 32

По усиленной теореме синусов $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = 2R_{AOB} = 6$,

откуда $AB = 6\sin\alpha$. Аналогично $BC = 8\sin(\pi - \alpha) = 8\sin\alpha$, $CD = 12\sin\alpha$. Тогда $AD = AB + CD - BC = 10\sin\alpha$, откуда $R_{DOA} = 5$.

Ответ: 5.

Задача 2 [17, № 513255]: В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит ее на отрезки, равные 5 и 3. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

Решение: Пусть это параллелограмм *ABCD*, а точки касания со сторонами *AB, BC, CD, DA* обозначены за *E, F, G, H* соответственно (см. рисунок 33).

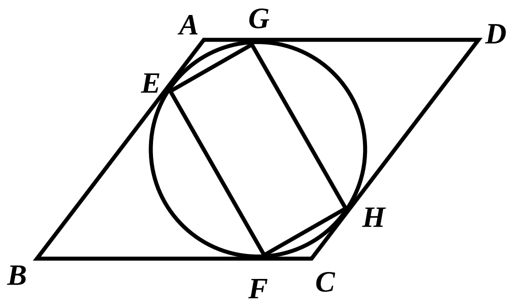

Рис. 33

а) Так как *ABCD* – описанный, следовательно, $AB+CD=AD+BC$ (по свойству 7), то есть $2AB=2AD$, значит, все стороны параллелограмма равны и это ромб.

б) Будем считать, что *AE* = 3, *EB* = 5. Центром окружности будет точка пересечения диагоналей ромба *O*, а радиус этой окружности – высота прямоугольного треугольника *AOB* – $OE=\sqrt{5\cdot 3}=\sqrt{15}$. Тогда по теореме Пифагора находим $BO=\sqrt{15+25}=\sqrt{40}$, $AO=\sqrt{24}$. Значит, $AC=2\sqrt{24}$, $BD=2\sqrt{40}$.

Поскольку точки *E* и *F* делят стороны *AB* и *BC* в одинаковом отношении 3 : 5, треугольники *BEF* и *BAC* подобны с коэффициентом $k=\frac{5}{8}$, и *EF* || *AC*. Рассмотрим аналогично остальные стороны *EFGH*, получаем, что это параллелограмм, а так как $AC\perp BD$, то *EFGH* – прямоугольник. Значит, его площадь равна:

$$EF \cdot EG = \frac{5}{8} AC \cdot \frac{3}{8} BD = \frac{15}{64} \cdot 2\sqrt{24} \cdot 2\sqrt{40} = \frac{15\sqrt{15}}{2}.$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{15}}{2}$.

Задача 3: В равнобедренную трапецию *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* вписана окружность, *CH* – высота трапеции.

а) Доказать, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке *BH*.

б) Найдите диагональ *AC*, если известно, что средняя линия трапеции равна $\sqrt{6}$, а угол *AOD* равен 135°, где *O* – центр окружности, вписанной в трапецию, *AD* – большее основание.

Решение: а) Пусть точки *K* и *L* – точки касания окружности оснований трапеции, тогда $OK = OL = r_{\text{впис}}$ (см. рисунок 34).

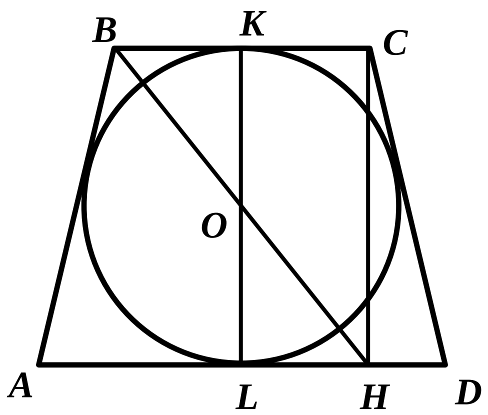

Рис. 34

Так как *OK* = *OL* и углы *OBK* и *LHO* равны как накрест лежащие при *BC* || *AD* и секущей *BH*, то Δ *BOK*=Δ *HOL*. Поэтому *BO* = *OH*.

По свойству 6 центр вписанной в трапецию окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов трапеции. Данная трапеция *ABCD* – равнобедренная, поэтому углы *OBK* и *OCK* равны. Значит, треугольники *BOK* и *COK* равны, следовательно, *BO* = *OC*.

Следовательно, *BO* = *OC* = *OH*, то есть точка *O* равноудалена от вершин прямоугольного треугольника *BCH*. Значит, *O* – центр описанной около треугольника BCH окружности. Следовательно, O принадлежит BH (его середина).

б) Для доказательства пункта сделаем дополнительный чертеж (см. рисунок 35).

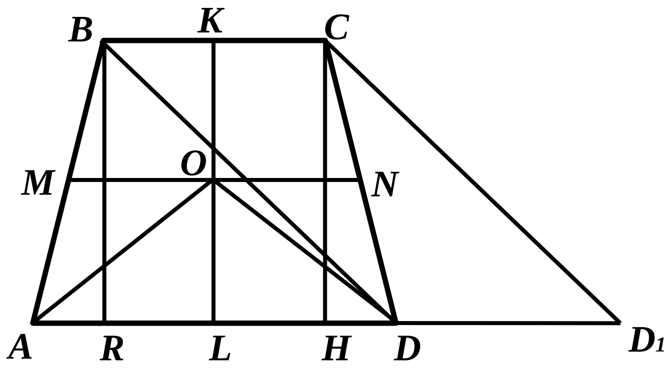

Рис. 35

Пусть MN – средняя линия трапеции. Точка O принадлежит MN и O – её середина, поэтому $MO = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

AO – биссектриса угла MAL, тогда $\angle MAO = \angle RAO$. $\angle RAO = \angle MOA$ как накрест лежащие, следовательно, Δ AMO – равнобедренный, $AM = MO = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Тогда $AB = 2AM = \sqrt{6}$.

По условию $\angle AOD$ = 135°, $\angle OAD$ + $\angle ODA$ = 45°. Значит, $\angle BAD$ = $\angle CDA$ = 45°. Пусть BR перпендикулярен AD, тогда $BR = AR = \sqrt{3}$.

Построим $CD_1 \parallel BD$, где точка D_1 лежит на прямой AD. Четырехугольник BCD_1D – параллелограмм. CD_1 = BD (противоположные стороны), BD = AC (диагонали равнобедренной трапеции), тогда $CD_1 = BD = AC$.

ΔACD_1 – равнобедренный, AD_1 – основание. Тогда $AD_1 = AD + DD_1 = AD + BC = 2MN = 2\sqrt{6}$. $CH = BR = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора из ΔCHA: $AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{CH^2 + \left(\frac{AD_1}{2}\right)^2} = \sqrt{3+6} = 3$.

Ответ: AC = 3.

Занятие 8

Тема: Работа над проектом и его защита

Тип урока: Урок-практикум

Цель урока: Сформировать умения применять свойства и признаки вписанного и описанного четырехугольников на практике.

Задачи: 1. Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $BK = OK$.

а) Докажите, что четырехугольник $ABKC$ вписанный.

б) Найдите длину отрезка AO, если известно, что радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны 3 и 12 соответственно, а $OK = 5$.

2. Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

б) Найдите длину отрезка DQ, если известно, что $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.

3. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60^\circ, \angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

4. В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение $EH : AC$, если угол ABC равен 30°.

5. Из точки M, взятой на окружности с центром в точке O, на диаметры AB и CD опущены перпендикуляры MK и MP соответственно.

а) Докажите, что существует точка, одинаково удаленная от точек M, O, P, K.

б) Найдите площадь треугольника MKP, если известно, что $\angle MKP = 30^\circ, \angle AOC = 15^\circ$, а радиус окружности равен 4.

6. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в нее окружности.

7. В прямоугольном треугольнике ABC синус угла A равен $\frac{1}{3}$. На гипотенузе AB взята точка H, а на катите AC – точка K. Известно, что прямая KH перпендикулярна гипотенузе и делит треугольник ABC на две равновеликие части.

а) Докажите, что в четырехугольник $KHBC$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если известно, что $KH = 1$.

8. Окружность проходит через вершины A и B параллелограмма $ABCD$, пересекает стороны AD и BC в точках M и N соответственно и касается стороны CD.

а) Докажите, что точки C, D, M и N лежат на одной окружности.

б) Найдите длину отрезка AD, зная, что $BM = a$, $MD = b$, $NC = c$.

9. Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

б) Найдите длину отрезка DQ, если известно, что $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.

10. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит ее на отрезки, равные 3 и 2. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной работы было рассмотрение особенностей методики изучения темы «Вписанные и описанные четырехугольники» в курсе математики средней школы и разработка элективного курса по теме «Критерии вписанных и описанных четырехугольников» для учащихся 10-11 классов. В ходе теоретического и экспериментального исследования получены следующие основные результаты: рассмотрена методика обучения учащихся решению задач по теме «Вписанные и описанные четырехугольники» на уроках математики, приведены примеры заданий по формированию операций, из которых состоит действие решения задач. Кроме того, рассмотрены особенности изучения темы в учебниках геометрии таких авторов как: Атанасян Л. С. и др., Шарыгин И. Ф., Александров А. Д. и др., Погорелов А. В., Смирнова И.М.

Разработан и апробирован элективный курс «Критерии вписанных и описанных четырехугольников» для учащихся 10-11 классов с целью повышения практических умений в решении задач.

Данный элективный курс может быть также использован в организации образовательного процесса при подготовке учащихся к единому государственному экзамену.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александров, А. Д. Геометрия : учеб. пособие для 8 кл. с углубл. изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – Москва : Просвещение, 2002. – 240 с.
2. Амелькин, В. В. Геометрия на плоскости : Теория, задачи, решения: учеб. пособие по математике / В. В. Амелькин. – Минск : ООО «Асар», 2003. – 592 с.
3. Атанасян, Л. С. Курс элементарной геометрии. Ч.1. / Л. С. Атанасян. – Москва : Сантакс – Пресс, 1997. – 304 с.
4. Вологжанина, М. Б. Признаки вписанных четырехугольников / М. Б. Вологжанина // Наука в современном мире : сб. статей Международной науч.-практической конференции (19 февраля 2015 г., г. Стерлитамак). – Стерлитамак : РИЦ АМИ, 2015. – С. 17–19.
5. Вологжанина, М. Б. Факультативные занятия по теме «Вписанные четырехугольники» / М. Б. Вологжанина // Сборник статей IX Международной науч.-практической конференции «Наука в современном обществе : закономерности и тенденции развития» (Пермь, 25.02.2017 г.). – Пермь : Аэтерна, 2017.
6. Вологжанина, М.Б. Критерии вписанного четырехугольника / М. Б. Вологжанина // Новая наука : От идеи к результату : Международное научное периодическое издание по итогам Международной науч.-практической конференции (29 мая 2016 г, г. Сургут) / в 3 ч. Ч.2. – Стерлитамак : АМИ, 2016. – С. 22–25.
7. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. – 20-е изд. – Москва : Просвещение, 2010. – 384 с.
8. Гордин, Р. К. ЕГЭ 2014. Решение задача С4 / Р. К. Гордин. – 3-е изд. доп. – Москва : МЦНМО, 2014. – 448 с.

9. Готман, Э. Г. Задачи по планиметриии методы их решения: пособие для учащихся / Э. Г. Готман. – Москва : Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996. – 240 с.
10. Дендеберян, Н. Г. Проектирование элективного курса по решению математических задач с практическим содержанием в средней школе / Н. Г. Дендеберян, Е. В. Кострыкина // Методический поиск: проблемы и решения. – 2016. – №1. – С. 39–43.
11. ЕГЭ 2012. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – Москва : Издательство «Экзамен», 2012. – 188 с.
12. ЕГЭ 2013. Математика : сборник тренировочных работ / И. Р. Высоцкий [и др.]. – Москва : МЦНМО, 2013. – 215 с.
13. ЕГЭ 2013. Математика. Типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – Москва : Издательство «Национальное образование», 2012. – 192 с.
14. ЕГЭ 2014. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 (С) / И. Р. Высоцкий [и др.]. – Москва : Издательство «Экзамен», 2014. – 215 с.
15. ЕГЭ 2016 по математике. Задания 16 (профильный уровень) [Электронный ресурс] // «Решим все». – Режим доступа : http://reshimvse.com/mathege/?type=mc4.
16. Зеленяк, О. П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal / О. П. Зеленяк. – Киев, Москва : ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. – 336 с.
17. Каталог заданий. Задача на доказательство и вычисление [Электронный ресурс] // Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». – Режим доступа : https://ege.sdamgia.ru/test?theme=206.

18. Каталог заданий. Задача на доказательство и вычисление [Электронный ресурс] // Интернет-проект «Задачи». – Режим доступа : http://www.problems.ru/about_system.php.
19. Кетлер, А. К. Метрические соотношения элементов четырехугольника, вписанного в окружность / А. К. Кетлер // Математика в школе. – 1971.– № 6. – С.59–66.
20. Киселев, А. П. Элементарная геометрия / А. П. Киселев. – Москва : Просвещение,1980. – 287 с.
21. Кожухов, С. К. Планиметрические задачи с неоднозначным ответом / С. К. Кожухов // Математика в школе. – 2011. – №5. – С. 11-15.
22. Корянов, А. Г. Задача 18 (С4) ЕГЭ Математика 2015. Планиметрические задачи на вычисление и доказательство (типовые задания 18 (С4)) / А. Г. Корянов, А. А Прокофьев. – Москва & Брянск, 2014. – 39 с.
23. Корянов, А. Г. МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2013 (типовые задания С4). Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи) / А. Г. Корянов, А. А Прокофьев. – Ростов-на-Дону : Легион, 2013. – 91 с.
24. Корянов, А. Г. Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников»: лекции 5–8 / А. Г. Корянов, А. А Прокофьев. – Москва : Педагогический университет «Первое сентября», 2012. – 100 с.
25. Курбатова, Н. Н. Программа внеурочной деятельности по математике «Математика после уроков» / Н. Н. Курбатова // Молодой ученый. – 2016. – №16. – С. 343–351.
26. Куценок, В. Е. Обучение методам решения геометрических задач, основанных на использовании вспомогательной окружности: дис. …канд. пед. наук / Куценок Владимир Евгеньевич. – Москва, 1992. – 156 с.
27. Куценок, В. Е. Окружность помогает решать задачи / В. Е. Куценок // Математика в школе. – 1990. – №2. – С. 55–57.
28. Панферов, В. С. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ / В. С. Панферов, И. Н. Сергеев. – Москва : Интеллект-Центр, 2010.

29. Погорелов, А. В. Геометрия : учеб. для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений / А. В. Погорелов. – 6-е изд. – Москва : Просвещение, 2005. –224 с.
30. Полонский, В. Б. Учимся решать задачи по геометрии : учеб.-метод. пособие / В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович, М. С. Якир. – Калининград : «Магистр», 1996. – 256 с.
31. Понарин, Я. П. Элементарная геометрия : В 2 т. – Т.1 : Планиметрия, преобразования плоскости / Я. П. Понарин. – Москва : МЦНМО, 2004. – 312 с.
32. Прокофьев, А. А. Математика. Подготовка к ЕГЭ : решение планиметрических задач (С4) / А. А. Прокофьев, А. Г. Корянов. – Ростов-на-Дону : Легион, 2014. –208 с.
33. Прокофьев, А. А. Пособие по геометрии для подготовительных курсов (планиметрия) / А. А. Прокофьев. – 4-е изд. перераб. и доп. – Москва : МИЭТ, 2007. – 232 с.
34. Рябухо, Е. Н. Формирование познавательной компетентности учащихся на факультативных занятиях по математике : материалы V Международной научно-практической конференции «Инновационные тенденции развития системы образования» / Е. Н. Рябухо, В. П. Батутина. – Чебоксары : ООО Центр научного сотрудничества «Интерактив плюс», 2016. – С. 57–61.
35. Смирнова, И. М. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – 2-е изд., испр. – Москва : Мнемозина, 2007. – 376 с.
36. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. 7 - 9 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / И. Ф. Шарыгин. – Москва : Дрофа, 2012. – 462 с.
37. Шарыгин, Г. И. Лекции по элементарной геометрии / Г. И. Шарыгин. – Москва : МЦНМО, 2014. – 216 с.
38. Шарыгин, И. Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И. Ф. Шарыгин, Р. К. Гордин. – Москва : ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 400 с.

39. Яковлев, И. В. Необходимые и достаточные условия [Электронный ресурс] / И. В. Яковлев. – Режим доступа : http://mathus.ru/math/iff.pdf.
40. Ященко, И. В. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году : методические указания / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров. – Москва : МЦНМО, 2009.
41. Ященко, И. В. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2013 : Математика / И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий ; под ред. А. Л. Семенова, И.В. Ященко. – Москва : ООО «Издательство АСТ» : ООО « Издательство Астрель», 2013. – 111 с.